ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - 2ο ΘΕΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

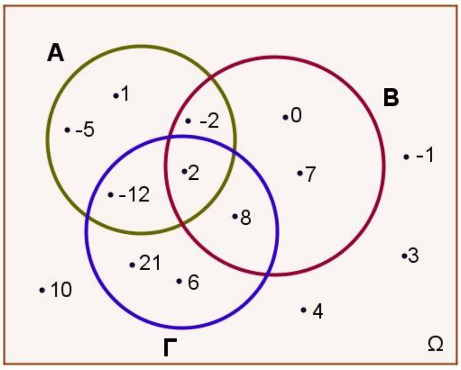
Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης. (Μονάδες 15)

2. **α)** Αν Α, Β, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A\cup B$ ii) $B\cap \Gamma$ iii) $(A\cap B)\cap \Gamma$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)



3. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α : η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

4. Δίνεται το σύνολο Ω={1,2,3,4,5,6} και τα υποσύνολά του Α={1,2,4,5} και Β={2,4,6}.

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω, τα σύνολα Α και Β.

Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, Α΄ και Β'. (Μονάδες 13)

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. (Μονάδες 4)

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β. (Μονάδες 4)

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β. (Μονάδες 4)

5. Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

6. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες :

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{4},\ \mathrm{P(A-B)} = \frac{5}{8},\ \mathrm{P(B)} = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$ (Μονάδες 9)

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β» . (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

7. Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 13)

8. Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$ **ii)** Μ-Α **iii)** M' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

9. Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) B-A iii) Α΄ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 7)

10. Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$ **iii)** B-A **iv)** Α΄ (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 13)

11. Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης (Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης. (Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης. (Μονάδες 10)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^o :   ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

12. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης; $\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ (Μονάδες 13)

13. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\delta\gamma}$ (Μονάδες 15)

14. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

15. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, 1/\alpha$
(Μονάδες 12)

16. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

17. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5) **β)** $2x-3y$ (Μονάδες 10) **γ)** $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

18. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12) **β)** $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

19. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$

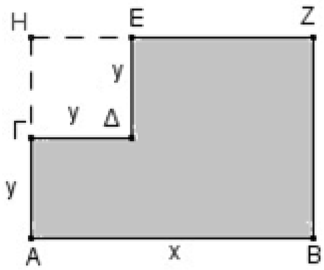
Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

20. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$ (Μονάδες 10)



β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

21. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

22. Δίνονται οι παραστάσεις: $K= 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

23. Δίνονται οι παραστάσεις: $K= 2\alpha^2 +\beta^2 +9$ και $\Lambda=2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda=(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

24. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με α > 0 και β > 0. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

25. α) Αν α < 0 , να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν α<0, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

26. α) Αν α, β ∈ℝ-{0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

27. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: 1 < x < 4 και 2 < y < 3 . Να αποδείξετε ότι :

α) A = x − y + 2 . (Μονάδες 12)

β) 0 < A < 4 . (Μονάδες 13)

28. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε x ≥ 2 , $A = 3x - 4$

ii) για κάθε x < 2 , $A = 8 - 3x$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι x ≥ 2 να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = 3x + 4$ (Μονάδες 13)

29. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα 5 < x < 10 ,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$ (Μονάδες 15)

30. Δίνεται η παράσταση: A=|x-1|-|x-2|

α) Για 1<x<2, να δείξετε ότι: A=2x -3 (Μονάδες 13)

β) Για x<1, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

31. Δίνονται οι παραστάσεις: Α=|2x - 4| και Β=|x - 3|, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι Α + Β = x − 1 . (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει Α + Β = 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

32. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x , 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \le 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

33. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για x=5,να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

34. Δίνεται η παράσταση: $A = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}\right)$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

35. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$ (Μονάδες 13)

36. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση Κ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

37.Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν x= -3, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

38. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν x=4, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$ (Μονάδες 13)

39. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για x=4, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

40. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{\left(x-2\right)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \le 2$, ισχύει Α = Β. (Μονάδες 10)

41. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$ $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ $\sqrt{5} \cong 2{,}24$ και $\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$ (Μονάδες 13)

42. α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

43. Δίνονται οι αριθμοί : $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: Α – Β = 4 (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

44. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$, $B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $\Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: Α + Β + Γ = 23 . (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

45. Αν είναι Α= $\sqrt[3]{5}$, Β= $\sqrt{3}$, Γ= $\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Α · Β · Γ = $\sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

46. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0{,}8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

47. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda= -1$. (Μονάδες 12) **β)** Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

48. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

49. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$ (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες12)

50. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

51. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$. (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την

$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$. (Μονάδες 13)

52. Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: Α= 4. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: |x+A|=1. (Μονάδες 13)

53.α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2| = \sqrt{3}$ (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

54. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B = \dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι: **i)** $A + B = \dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β. (Μονάδες 9)

55. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι : Α + Β = 3 και $A \cdot B = \dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α, Β (Μονάδες 13)

56. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda-1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1,να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για λ=2 να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

57. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό −2 . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$. (Μονάδες 13)

58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, λ παράμετρος.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β)Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε λ∈ℝ.
(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει

$x_1 + x_2 = x_1 x_2$ (Μονάδες 9)

59. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$, λ παράμετρος.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β)Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε λ∈ℝ.
(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει

$x_1 + x_2 = -x_1 x_2$ (Μονάδες 9)

60. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο λ∈ℝ.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε λ∈ℝ.
(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει

$(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$ (Μονάδες 9)

61. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$
(Μονάδες 10)

62.Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με κ∈ℝ

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε κ∈ℝ , όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.
(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 12)

63. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

64. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β, και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

65. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

66. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -64$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β. (Μονάδες 7)

67. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο Π = 20cm και εμβαδό $E = 24cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

68. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2 + 10x - 12}{x-2} = 0$ (Μονάδες 10)

69. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{1+x}{x-1}$ και $B = \dfrac{2}{x^2 - x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α, Β πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει Α = Β . (Μονάδες 13)

70. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{1-x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0$$ (Μονάδες 15)

71. Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι (x+1) και x, με x>0.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι $90m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

72. Δίνονται οι ανισώσεις: 3x-1<x+9 και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

73. α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\ge 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.
(Μονάδες 7)

74. α)Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

75.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

76. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: |x+1|<2,

α) να δείξετε ότι x∈(-3,1) (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x. (Μονάδες 13)

77.

78.Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει |2x −1| < 1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι 0 < x < 1 (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: 1, x, x^2 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

79.α) Να λύσετε την ανίσωση: |x-5|<4. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:
$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$ (Μονάδες 15)

80. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.
(Μονάδες 9)

81. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.
(Μονάδες 7)

82. α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x| < 5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

83.α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

84. α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

85.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $α \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||α+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

86. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|x+1| + |x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

87. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι : $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1| + |y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

88. Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2 +4x+3<0$. (Μονάδες 15)

89. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|x+1|}{3} - \dfrac{|x+1|+4}{5} = \dfrac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 +2x +3 \le 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες 7)

90. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|< 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

91. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y (Μονάδες 13)

92. **α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|< 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

93. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ. (Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

94. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3}+1)^2$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

95. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

96. **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 -10x+21<0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A= |x-3|+|x^2 -10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2 +11x-24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$. (Μονάδες 5)

97. **α)** Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B =|x^2 + 4x + 5|-|x^2 +4x+3|$

(Μονάδες 15)

98. **α)** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 – x – 2 = 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 – x – 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

99. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης : $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 5)

100. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)= 3x^2 + 9x - 12$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

101. **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 -4x+1 \leq 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

102. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1 , x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$ (Μονάδες 15)

103. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

104. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \bullet x_2 = -3$ (Μονάδες 13)

105. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 -\lambda x +(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)