ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10 : Ορισμένο ολοκλήρωμα – Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ – Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\int_{x^2-1}^{2x-3}\sqrt{t^2-4}\,dt$.

2. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2f(x)-\ln x+2\int_x^1 tf(t)\,dt=x$ για κάθε x>0.

3. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+\eta\mu x$ για κάθε x∈R.

4. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_0^x f(x-t)e^t\,dt=\eta\mu x$ για κάθε x∈R.

5. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει f(1)=1 και $\int_0^1 f(xt)\,dt=\frac{1}{4}f(x)$ για κάθε x>0.

6. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f : (-∞,0) → (0,+∞) για την οποία ισχύει $\eta\mu\left(\int_0^x f(t)\right)dt=2^x$ για κάθε x<0.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], 0<f(x)<1 για κάθε x ∈ [0,1] τότε η εξίσωση $1+\int_0^x f(t)\,dt=2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1).

8. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει η σχέση $\int_1^{x^2} f(t)\,dt\geq x^2-1$ για κάθε x ∈ R, να δειξετε ότι f(1)=1.

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : (0,+∞) → R τέτοια ώστε $\int_1^4 f(xt)\,dt\leq\int_1^4 f(t)\,dt$ για κάθε x>0. Αν f(4)=3 και f(1)=10, να δείξετε ότι $\int_1^4 f(t)\,dt=2$.

10. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο [α,β].

α) Αν f(x) ≤ g(x) για κάθε x ∈ [α,β], να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

β) Αν m είναι το ελάχιστο της f στο [α,β] και M το μέγιστο της f στο [α,β], να δείξετε ότι $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leq M(\beta-\alpha)$

γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{3+t^2}\,dt$

11. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\int_e^x \frac{1-\ln t}{t^2}dt$.

12. Να βρείτε τον αριθμό λ ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\int_1^x \frac{\lambda t^2-10t+\lambda}{t^2+4}dt$ να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$.

13. Αν ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε x∈R, να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $F(x)=\int_{2-x}^{x} f(t)dt$.

14. Έστω οι συναρτήσεις f, g : R → R, όπου η g είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(g(x))=e^{4x}+\int_0^x g^2(t)dt$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η g είναι 1 – 1.

15. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h}\frac{\eta\mu x}{x}dx$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{4x}\frac{\eta\mu 2t}{t}dt}{x}$, x>0

16. Δίνεται συνάρτηση f : R → R, συνεχής στο R με f(0)=3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(x^2 t)dt$, x>0.

17. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\eta\mu x-\alpha x}\int_0^x \frac{t^2}{t^2+\beta}dt\right]=-2$, να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α και β.

18. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $\int_0^1 f(t)dt=1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1)

19. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0,2) και f΄(x)<0 για κάθε x ∈ (0,2) και $\int_0^2 f(x)dx=20$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3x^2+6x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0,2)

20. Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο [α,β] με 0<α<β<1. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 ∈ [α,β] τέτοιο ώστε $x_0\int_\beta^{x_0} g(t)dt=(x_0-1)\int_\alpha^{x_0} g(t)dt$.

21. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, με $f'(x)>0$ για κάθε x>0 και η $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Να δείξετε ότι $F(x)<xf(x)$ για κάθε x>0.

22. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε $\left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right|\le h^2$ για κάθε $x,h\in R$. Να δείξετε ότι f(x)=0 για κάθε $x\in R$.

23. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, με συνεχή παράγωγο τέτοια ώστε f(α)>0 και $f'(x)>f^2(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$

24. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{4t^2+1}{t^2+1}dt$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+3}dt$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{e^{x+1}}{\ln(3+t^2)}dt$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2-2x^2}dt$

25. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης $f(x)=\int_0^x\frac{2e^t+4}{e^t+1}dt$.

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ και ο σταθερός αριθμός $\alpha\in R$. Αν $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ και $h(x)=\int_\alpha^x g(t)dt$, $x\in R$, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $h(x)=\int_\alpha^x (x-t)f(t)dt$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(0)=\frac{1}{3}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}\int_0^3 f(xt)dt$

28. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :
$\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f(x)+e^x$ για κάθε $x\in R$.

29. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :
$f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$ για κάθε $x\in R$.

30. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :
$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\eta\mu x f(x)dx=f(x)+\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in R$.

31. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f αν ισχύει η σχέση $f(x)=2e^{2x}-\int_0^x e^t f(x-t)dt$ για κάθε x, t ∈ R.

32. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, αν ισχύει η σχέση $\int_0^x f(u)du = xf(x)-x^2e^x$ για κάθε x ∈ R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο O(0,0).

33. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f : (0,+∞)→R αν ισχύει $f(x)=1+\int_{x+1}^{2x}\frac{f(t-x)}{x}dt$ για κάθε x >0.

34. Έστω f συνεχής στο [0,1]. Να δείξετε ότι υπάρχει μιγαδικός $z=x+i\int_0^x f(t)dt$, x∈(0,1] με $|z|=1$.

35. Έστω f : R → R, συνεχής στο R και οι μιγαδικοί $z=\int_1^\lambda f(t)dt+i\int_2^\lambda f(t)dt$, λ ∈ R. Να δείξετε ότι οι εικόνες όλων των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία συνευθειακά.

36. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (2x+1)e^{2x^2+2x+50000}dx$

37. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{1+\eta\mu 2x}dx$

38. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^\nu x}{\eta\mu^\nu x+\sigma\upsilon\nu^\nu x}dx$, ν ∈ N. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την κοινή τιμή των δύο ολοκληρωμάτων.

39. α) Έστω f συνεχής στο [α,β]. Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}}{(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}+(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}}dx$.

40. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$

(Υπόδειξη : Να κάνετε την αντικατάσταση t= εφu, $u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$)

41. Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{e^x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}dx=\alpha+\eta\mu\alpha$

42. Έστω συνάρτηση f:[0,1]→R, συνεχής, ώστε $\int_0^1 f^2(x)dx = 4\int_0^1 x^3 f(x)dx - \frac{4}{7}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

43. Έστω $f(x) = x \cdot e^{-\nu x}$ για κάθε $x \in R$, $\nu \in N^*$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι $\frac{2}{e^2 \cdot \nu^2} \le \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \le \frac{1}{e \cdot \nu^2}$.

44. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(0)=0 και f΄ συνεχής στο R. Αν f΄(x)>f(x) για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι :

α) $x \cdot f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

β) $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$

45. Έστω f(x)=ln(x+1) – x, $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x) \le 0 \le g(x)$, για κάθε $x \ge 0$

β) $\frac{1}{3} \le \int_0^1 \ln(x+1)dx \le \frac{1}{2}$

γ) $\frac{2}{3} \le \ln 2 \le \frac{3}{4}$

46. Έστω συνάρτηση f:[0,2]→R, δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄ γνησίως φθίνουσα στο [0,2] και f(0)=0. Επίσης ισχύει $\int_0^2 [2xf'(x) + x^2 f''(x)]dx = 12$. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx \ge 6$.

47. Έστω $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της Α(1,f(1)).

γ) Να δείξετε ότι $\int_1^3 f(x)dx \ge 2e$.

48. Έστω $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f^{-1}(x)dx$.

49. Έστω $f : [0,2] \to R$ με $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$.

α) Να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2+2x}\right)dx$

50. Έστω $f:[0,1]\to R$ με $f(x)=e^{x^2}$.

α) Να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\frac{3}{1+3x+f(x)}dx-\int_1^e\frac{1}{1+x+3f^{-1}(x)}dx$

51. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R με f άρτια και g(x)+g(–x)=1 για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)g(x)dx=\int_0^{\alpha}f(x)dx$, $\alpha>0$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{e^x+1}dx$

52. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=3$, f(0)=2 και ισχύει $\int_0^3[x\cdot f''(x)+2f'(x)]dx=2$ τότε :

α) να βρείτε το f(3)

β) να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{1}{7}$.

53. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αν f(0)=4, f(2)=10 και ισχύει $\int_0^2 x\cdot f''(x)dx=0$ τότε :

α) να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_4^{10}\left[\frac{1}{3}f\left(\frac{x-4}{3}\right)+f^{-1}(x)\right]dx$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in R$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\left(\int_1^x f(t)dt\right)dx$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^3}$, $x\in R$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2\left(\int_{\frac{t}{2}}^1 tf(x)dx\right)dt$.

56. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R και οι συναρτήσεις $g(x)=\int_0^1 xf(tx)dt$, $x\in R$ και $h(x)=\int_0^x x\cdot f(x-t)dt$, $x\in R$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g στο σημείο της A(2,g(2)) έχει εξίσωση y=2x, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_h της h στο σημείο της B(2,h(2)).

57. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $\int_1^x f(t)\ln\frac{x}{t}dt = xf(x) - x - \int_1^x tf'(t)dt$, για κάθε x >0.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\int_x^{4x}\frac{1}{f(t)-1}dt\right]$

58. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $\int_1^x\left[\int_1^t f(u)du - tf(t)\right]dt = x^3 - x^2$, για κάθε x >0.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot ημ\frac{1}{x}\right)$

59. Έστω συνάρτηση f:R→R συνεχής τέτοια ώστε $\int_{e^x}^{e^{4x}} t^2 f(t)dt = 3\cdot\ln(x+1)$, για κάθε x > –1.

α) Να βρείτε το f(1)

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\int_1^x f(t)dt}{e^{x-1}-x}\right)$

60. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^{1+εφx}\frac{1}{t^2-2t+2}dt$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

α) Να βρείτε τον τύπο της g (χωρίς τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης)

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{x^4-2x^2+2}dx$

61. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R, ώστε $\int_1^2 f(3x)dx = -5$ και $\int_1^2 f(5x)dx = 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $\int_\xi^{1999} f(t)dt = \int_{2\xi}^{1999} f(t)dt$.

62. Έστω συνάρτηση f:R→R συνεχής τέτοια ώστε $\int_2^4\left(\int_0^1 2xf(t)dt\right)dx = 12$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3x_0^2$.

63. Έστω συνάρτηση f:R→R συνεχής με $\int_0^2 f(t)dt = 4$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(x)\cdot f(t)dt = 2x^3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

64. Θεωρούμε συνάρτηση f : R→R δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Επίσης ισχύει $\int_0^3[f'(x) + x\cdot f''(x)]dx = -6$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι κοίλη

β) να δείξετε ότι $\int_1^3 f(x)dx < 2\int_1^2 f(x)dx$

65. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο R τέτοιες ώστε $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$ και $\int_0^x g(t)dt \ge \int_0^x f(t)dt$ για κάθε x ∈ R. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f και g στα σημεία τους $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα να είναι παράλληλες.

66. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, με $0<\alpha<\beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$ και τη συνάρτηση $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_\alpha^x f(t)dt,\quad x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β) $g(x_0)=2+f(x_0)$.

67. Έστω συνάρτηση f : R → R συνεχής, τέτοια ώστε $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{h}} he^{t^2}dt$ και $\int_0^x |z-3i| f(t)dt \ge |3z-i|x$ για κάθε x ∈ R.

α) Να βρείτε το f(0)

β) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M(z) είναι κύκλος

68. Έστω συνάρτηση f : R → R συνεχής τέτοια ώστε $f(x)=2x-2+\frac{3}{e^x}+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$ για κάθε x ∈ R και η συνάρτηση $g(x)=\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{f^2(t)}dt$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τον τύπο της g (χωρίς τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x(\ln^2 x+1)^2}dx$

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^t e^{-u^2}du\right)dt$ για κάθε x ∈ R.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $f(x)\ge\frac{1-e}{2e}$ για κάθε x ∈ R

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\int_{1+|x|}^{1+2x^2}\left(\int_1^t e^{-u^2}du\right)dt<0$

70. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής τέτοια ώστε $\int_0^x f(t)dt = \int_2^x \left(\int_1^u \frac{4t^2}{t^4+1}dt \right) du$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $|f'(x)| \le 2$, για κάθε $x \in R$

β) Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| \le 2|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in R$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{10}}$

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \int_0^2 f(\frac{x}{2})dx + 2\int_1^2 f(x)dx$

71. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R και ικανοποιούν τις σχέσεις $f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in R$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x) = f(x) - g(x)$, $x \in R$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

72. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δύο τεθλασμένες γραμμές $y = |x - 1|$ και $y = 3 - |x|$.

(Εξετάσεις ΑΣΕΠ – Μαθηματικών 2009)

73. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$ και η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(R)=R συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(x) = \int_0^x g(f(t))dt + 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = -e και x=0.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}(x) + 1999\right) < \int_0^{1999} g(f(x))dx + 1$

74. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ και Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1. Να δείξετε ότι :

α) $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \ge 0$

β) $E = \int_0^1 e^{t^2} dt - \frac{e-1}{2}$

γ) $\frac{3-\pi}{2} < E < e$

75. Έστω $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ και η ευθεία ε : $y = \kappa^2$, $0<\kappa<1$. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την ευθεία ε και τις ευθείες x=0 και x=1, να δείξετε ότι $4E - 1 \ge 0$.

`

76. Έστω f συνεχής στο R τέτοια ώστε $|f(x)-4x+2010|\le\frac{\ln(\ln x+1)}{x}$ για κάθε $x\ge1$.

α) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $+\infty$

β) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες x=1 και x=e, να δείξετε ότι $E\le\ln\frac{4}{e}$.

77. Έστω f : $[0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f(x)\cdot e^{f(x)}=\int_0^x e^{2f(t)}dt$ για κάθε $x\ge0$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

β) Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

γ) $f(x)\le xf'(x)$ για κάθε $x\ge0$

δ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1, να δείξετε ότι $E\le\frac{f(1)}{2}$.

78. Έστω $f: R\to R$ με f(0)=0 και $f'(x)=\ln(x^2+e)$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\ge x$ για κάθε $x\ge0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα

γ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f'}$ της f΄, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1, να δείξετε ότι $1<E<\ln(1+e)$

79. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $(f'(x))^2-10f'(x)\le -x^2+2x-10$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι $1\le f'(x)\le 9$ για κάθε $x\in R$

β) Αν f(0)=0 και Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=2, να δείξετε ότι $2\le E\le18$

80. Έστω f συνεχής στο R με $f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ για κάθε $x\in R$ με f(R)=R.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f και την ευθεία y = x.

81. Έστω $z_1,z_2,z_3\in C$ τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-z_1|+|x-z_2|+|x-z_3|$, $x\in R$. Να δείξετε ότι :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ **β)** $\frac{3}{2}\le\int_0^1 f(x)dx\le\frac{9}{2}$

82. Έστω f:R→R παραγωγίσιμη τέτοια ώστε να ισχύει $2x \le f'(x) \le 2x+1-f(1)$ για κάθε x ∈ R και f(0)=0.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2x_0 + f(1) - 1$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $f(x) = x^2$, x ∈ R

γ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f και τις ευθείες $y=\alpha^2$, $y=(\alpha+1)^2$, α>0 και να δείξετε ότι $E(\alpha) > \frac{4}{3}$.

83. Έστω f:R→R δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄΄ συνεχή και f΄΄(x)≠0 για κάθε x ∈ R και $f'(2) - f'(-2) = -1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Αν $g(x) = \int_{6-x}^{x} f(t)dt$, x ∈ R τότε :

i) να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα

ii) να δείξετε ότι $\int_1^5 f(t)dt < 2\int_2^4 f(t)dt$

84. Έστω f : (0,+∞) →R δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄΄(1)=0 και $x^2 f'(x) - 2xf(x) = 3$ για κάθε x>0.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παρά= σταση C_f της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=e^2$.