ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 11 : ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$, $z \in C$, $\alpha, \beta \in R$ και z_1, z_2 είναι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$.

α) Να βρειτε τους αριθμούς α και β.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{100} + z_2^{100}$ είναι πραγματικός.

γ) Αν $|w - z_1| = |\overline{w} - z_1|$, να αποδείξετε ότι $w \in R$.

δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w που ικανοποιούν την εξίσωση $|w - z_2| + |\overline{w} - z_2| = 10$ βρίσκονται σε έλλειψη.

ε) Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{5}(17 + i)$, τότε, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$, x>0. Να δείξετε ότι :

α) $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

β) η f είναι γνησίως φθίνουσα

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$

δ) $(\dfrac{x+1}{x})^x > \dfrac{x}{x+1} \cdot e$, x>0.

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο R όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, με $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 g(t)dt$.

Αν $\int_0^x f(t)dt + \int_2^{2-x} g(t)dt \geq x^2 - 2x$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι :

α) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος (0,2)

β) f(0) + f(2) = g(0) + g(2)

γ) i) υπάρχει $x_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = g(2 - x_1)$

ii) υπάρχει $x_2 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) + g'(2 - x_2) = 2$

4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f(0) \neq 0$ και $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x,y \in R$.

α) Να βρείτε το f(0)

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in R$ ώστε $f(x) = e^{cx}$, για κάθε $x \in R$.

δ) Αν f ΄(0)=3, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\frac{x}{3})}{x-2}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \dfrac{2\alpha^2 x}{(2x-\alpha)^2}$, όπου $\alpha > 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Στην περίπτωση που η f έχει τοπικό ελάχιστο $\frac{3}{4}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες y = 1, x = -2 και x = 0.

6. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R με συνεχή παράγωγο και ισχύουν f΄(x)>0 και $g'(x) = x \cdot \int_1^x f'(xt)dt$, για κάθε x∈R.

α) Να δείξετε ότι $g'(x) = f(x^2) - f(x)$, x∈R.

β) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0,1), τέτοιο ώστε : $f'(\xi^2) = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$.

7. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (-1,1) και τύπο $f(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ισχύει f(ημx)=x.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον x΄x και τις ευθείες $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Έστω $f(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t}dt$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να δείξετε ότι για κάθε x > 1 ισχύει $f(x) > f(\frac{1}{x})$.

δ. Να δείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{3}{e} - 2x^2 \int_1^x \dfrac{1}{t^3} f(\frac{x}{t})dt$ για κάθε x>0. Να δείξετε ότι :

α) Για κάθε x>0 ισχύει ότι : **i)** f΄(x) = -2xf(x)

ii) $f(x) = 3e^{-x^2}$

β) **i)** Για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει : $3-3x^2 < f(x) < 3$

ii) $\frac{5}{8} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx < \frac{3}{2}$

γ) Η εξίσωση $\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt = \frac{13}{8} - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\frac{1}{2}, 1)$.

10. Έστω f παραγωγίσιμη στο [1,e] τέτοια ώστε : $f'(x) \cdot \mathrm{Re}(z_0) > 0$ για κάθε $x \in [1,e]$, όπου z_0 ρίζα της εξίσωσης $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{2010} = 1$ με $z \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,e]

β) Αν $\mathrm{Im}(z_0) \neq 0$ και ισχύει $\int_0^1 \frac{|z_0 + 1| e^{2x\mathrm{Re}(z_0)}}{\mathrm{Im}(z_0)} dx = \int_0^1 |z_0| \cdot e^{x\,\mathrm{Im}(z_0)} dx$, να βρείτε το z_0.

11. Έστω $z \in C$ με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ και $f(x) = |z + xi|$, $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0)=0 \Leftrightarrow z \in R^*$

β) Αν z=2, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g της g στο σημείο της $A\left(\sqrt{2}, g(\sqrt{2})\right)$ με $g(x) = \int_z^{x^2} x \cdot f(t)dt$

12. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R, παραγωγίσιμη στο 0, τέτοια ώστε $\int_1^x f(t)\,dt = e^x - x^2 + xf(x) - xe^x - e - 2$, για κάθε $x \in R$.

Α. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

β) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 2x + 1$ για κάθε $x \in R$.

Β. Αν $g(x) = xe^x + 2x + 1$, $x \in R$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f και g και των ευθειών x=0 και x=1.

13. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R, με $\int_0^1 x \cdot e^{x^2} f(x)dx = e^{x^2} + f(x)$, για κάθε $x \in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt = -\infty$

14. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο R, τέτοια ώστε $f''(x)+f'(x)=1$ για κάθε $x \in R$, $f(0) = -1$ και $f'(1) = \frac{e-1}{e}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τη μονοτονία

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(0,f(0))

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f

της f, την ευθεία (ε) του **(δ)** ερωτήματος και την ευθεία x=1.

15. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$, παραγωγίσιμη με $f(\alpha)>0$ και $2f(x)=e^{2f(x)}-x+1$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β]

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β]

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο [α,β]

δ) Να δείξετε ότι $\alpha=e^{2f(\alpha)}-2f(\alpha)+1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\alpha\geq 2$

ε) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β, με f(α)=1 και f(β)=2, είναι $E=\dfrac{3e^4-e^2-6}{2}$.

16. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\geq 0$, $g(x)=\dfrac{F(x)}{\int_0^x t\cdot f(t)dt}$, $x>0$.

α) Να δείξετε ότι $I=\int_0^1 e^t\left[f(t)+F(t)\right]dt=F(1)\cdot e$

β) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

γ) Αν g(2)=3, να δείξετε ότι :

i) $\int_0^3 f(t)dt<3\int_0^3 t\cdot f(t)dt$

ii) $\int_0^2 F(t)dt<\dfrac{5}{3}F(2)$

17. Έστω $z\in C$ του οποίου η εικόνα ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=9$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $|2z+xi|=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,3).

18. Έστω $f:R\to R$, κοίλη στο R με f(0)=0, f(2)=4.

α) Να δείξετε ότι $x\cdot f'(x)<f(x)$ για κάθε x>0

β) Αν $h(x)=\int_2^x \dfrac{f(t)}{t}dt$, x>0, να δείξετε ότι η h είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $h(x)\leq 2x-4$ για κάθε x>0

19. Αν $f(x)=x\ln x-x+2$, $x\geq 1$,

α) να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $A_{f^{-1}}$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2^x+x)\leq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)^{\frac{1}{\eta\mu x}}$ με $x\geq 0$

20. Έστω $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και $g:R\to R$, παραγωγίσιμη με $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f'(0)=g(0)=1$. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f''(x)=2g(x)\cdot g'(x)$ και $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in R$,

α) να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
γ) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
δ) να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) – 2x + lng(1) + 1 = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

21. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο R με f(0)=0, $\int_0^1 f(x)dx = -2$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f'(x) = 2g(x) + x \cdot g'(x)$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t)dt - x \cdot \int_0^x g(t)dt$, $x \in R$ είναι σταθερή με h(x)=2 για κάθε $x \in R$
β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in R$
γ) $\int_1^x f(t)dt \leq 2$ για κάθε $x \in R$
δ) υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $\int_1^{\xi} f(t)dt = 2010\xi - 2011$
ε) η εξίσωση f(x) = 2g(x) + 2 = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)