ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1 : ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

2ο Κεφάλαιο : Μιγαδικοί αριθμοί

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} iz - 3w = -5 + 4i \\ 3\overline{w} + \overline{z} = 4 \end{cases}$

(Απ. $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$, $w = \frac{5}{6} - \frac{5}{6}i$)

2. Να λύσετε στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\overline{z}^3 \cdot z^7 = 1$.
(Απ. z=1 ή z= -1 ή z=i ή z= -i)

3. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ισχύει $i^{3\nu+1} = -1$.
(Απ. ν=4λ+3, $\lambda \in N^*$)

4. Έστω $z \in C$ με $Re(z) \neq 0$ και $Im(z) \neq 0$. Να δείξετε ότι ο αριθμός $w = z^2 + z + 200$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $Re(z) = -\frac{1}{2}$.

5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του φυσικού αριθμού ν για την οποία ισχύει $(1+10i)^{\nu} + (10-i)^{\nu} = 0$
(Απ. ν=2)

6. Αν ο αριθμός $(1+\kappa i)^{11}$, $\kappa \in R$, είναι πραγματικός, να δείξετε ότι ο αριθμός $(\kappa + i)^{11}$ είναι φανταστικός.

7. Να βρείτε το άθροισμα $1 + 2i + 3i^2 + ... + \nu i^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$.

(Απ. $S = -\frac{(\nu+1)i^{\nu+1} + \nu i^{\nu} - i}{2}$)

8. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 + z + 1 = 0$, να δείξετε ότι :

α) $z^3 = 1$ **β)** $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}} = 2$

9. Να δείξετε ότι $w^2 + w + 1 = 0$ αν και μόνο αν $|w| = |w+1| = 1$.

10. Αν z, w $\in$ C με $|z| \leq 3$ και $|w| \leq 2$, να δείξετε ότι $|z \cdot \text{συν}\theta - w^2 \cdot \text{ημ}\theta| \leq 7$ για κάθε $\theta \in R$.

11. Αν z=1+2i και $f(z) = \frac{7 - z}{1 - z^2}$, να δείξετε ότι $|z| = 2|f(z)|$.

12. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει η σχέση $|z^2-2|=|z^2-4|$, να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=3$.

13. Αν $z^5-5z+10=0$ να δείξετε ότι $|z|>1$.

14. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο C με κέντρο O(0,0) και ακτίνας ρ=1, να δείξετε ότι :

α) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\dfrac{z+i}{-iz+1}$, $z\neq -i$ ανήκει επίσης στον κύκλο C με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=1

β) Ο αριθμός $u=\dfrac{z-w}{1-zw}$, $zw\neq 1$ είναι πραγματικός

γ) Ο αριθμός $v=\dfrac{z+w}{1-zw}$, $zw\neq 1$ είναι φανταστικός.

15. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει η σχέση $|z-3-3i|=4$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z+i|$.

(Απ. $A_{min}=1$, $A_{max}=9$)

16. Δίνονται οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $|(3+4i)z+4-3i|=10$. Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο της παράστασης $A=|iz-2+3i|$, καθώς και τους αριθμούς z_1, z_2 που αντιστοιχούν στο ελάχιστο και το μέγιστο αντίστοιχα, της παράστασης A.

(Απ. $A_{min}=3\sqrt{2}-2$, $A_{max}=3\sqrt{2}+2$)

17. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z+4|=2\sqrt{2}$ και $|w-4i|=\sqrt{2}$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=|z-w|$.

(Απ. $A_{min}=\sqrt{2}$, $A_{max}=7\sqrt{2}$)

18. Έστω $z_1, z_2\in C^*$ και A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $w_1=z_1+z_2$, $w_2=z_1-z_2$ και $w_3=z_1+iz_2\sqrt{3}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

19. Έστω $z_1, z_2\in C^*$ με $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$.

α) Αν A είναι η εικόνα του z_1 και B η εικόνα του z_2, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο, όπου O(0,0).

β) Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2011}+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2011}=1$

20. Δίνεται η εξίσωση : $z^2 - (2\varepsilon\varphi\theta)z + 1 = 0,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{4})$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι μη πραγματικοί αριθμοί.

β) Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Αν ισχύει $|z_1 + z_2| = \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{3}}$ να βρείτε την τιμή της εφθ και τις ρίζες z_1, z_2.

(Απ. **α)** $\Delta = 4(\varepsilon\varphi^2\theta - 1) < 0$ **β)** $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}i$)

21. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z όπου $|z|=4$ και το μιγαδικό w με $w=\frac{z-8}{z-2}$.

α) να βρείτε το $|w|$

β) αν $w \notin R$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε ο $(w + \frac{\lambda}{w}) \in R$.

(Απ. **α)** $|w| = 2$ **β)** $\lambda = 4$)

22. Να αναλύσετε το μιγαδικό αριθμό z=3+2i σε άθροισμα δύο άλλων μιγαδικών, των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στις ευθείες y=x-3 και y=3x-1.

(Απ. $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$ και $z_2 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$)

23. Έστω z, w ∈ C τέτοιοι ώστε $z^2 + w^2 = 0$. Να δείξετε ότι :

α) $|z + w| = |z - w|$

β) το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τετράγωνο όπου Ο(0,0), Α η εικόνα του z, Β η εικόνα του w και Γ η εικόνα του z+w.

24. Έστω z, w ∈ C. Να δείξετε ότι $|z| + |w| \le |z + w| + |z - w|$.

25. Έστω z_1, z_2, z_3 ∈ C τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \kappa$, κ>0 και $z_1+z_2+z_3 \neq 0$. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1 + z_2 + z_3}\right) \ge 0$.

26. Έστω z_1, z_2, z_3 ∈ C τέτοιοι ώστε $z_1+z_2+z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να δείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

27. Έστω z_1, z_2, z_3 ∈ C με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1+z_2+z_3 \neq 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να δείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

28. Έστω z_1, z_2, z_3 ∈ C με $|z_1| = |z_2 + z_3|$, $|z_2| = |z_1 + z_3|$ και $|z_3| = |z_1 + z_2|$. Να δείξετε ότι $z_1+z_2+z_3 = 0$.

29. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει :

α) $|z-3-i| = |z-1+5i|$

β) $|z-3| - |z+3| = 4$

(Απ. **α)** x+3y+4=0 **β)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1,\ x \le -\frac{4}{3}$)

30. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z| = 2$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $w = z - \frac{1}{z}$ ανήκει σε έλλειψη.

31. Δίνεται η εξίσωση $z^2 + (x-1)z - (y^2-1) = 0$ όπου x,y $\in$R με ρίζα τον αριθμό z_1 όπου $z_1 \in C - R$. Αν ισχύει $2\,\mathrm{Re}(z_1) = |z_1|^2$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M(x,y).

(Απ. παραβολή με εξίσωση $y^2 = x$)

32. Έστω z, w $\in$ C έτσι ώστε $|w| = 1$ και zw = z+1+wi. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

(Απ. y = - x)

33. **α)** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις : $\begin{cases} |z-3-2i| = |z-5| \\ |z-2+3i| = 2 \end{cases}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας των σημείων που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις :

$\begin{cases} |z-3-2i| \le |z-5| \\ |z-2+3i| \le 2 \end{cases}$.

(Απ. **α)** $z_1 = -3i$, $z_2 = 2-i$ **β)** π-2)

34. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό z.

α) Να δείξετε ότι $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1| = 3$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z όταν $|z-10| = 3|z-2|$

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (**β**) και επιπλέον ισχύει $|z_1 - z_2| = 6$, να δείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$.

(Απ. **β)** Κύκλος με κέντρο K(1,0) και ακτίνα R=3)

35. Θεωρούμε την υπερβολή C : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ και το μιγαδικό z=α+βi με α, β $\in$R.

Να δείξετε ότι η εικόνα M(z) ανήκει στην υπερβολή (C) αν και μόνο αν :

$|z^2 + 25| = |z|^2 + 7$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z-1}{iz+1}$, με z $\in$ C και z≠i. Αν ισχύει ότι $(\sqrt{3}+i)(i-z)^2+(z-1)^2=0$, να δείξετε ότι :

α) $f^{12}(-i)=-\dfrac{1}{64}$

β) $|f(z)|=\sqrt{2}$

γ) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο κέντρου K(-1,2) και ακτίνας ρ=2.