ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2 : Συναρτήσεις – Σύνθεση συναρτήσεων – Μονοτονία – Αντίστροφη συνάρτηση

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο Κεφάλαιο : Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$ **β)** $f(x)=\dfrac{2^x-3}{\sqrt{3-|x+1|}}$ **γ)** $f(x)=\dfrac{\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{e^x-1}}$

δ) $f(x)=\sqrt{1-\ln(x^2-3)}$

(Απ. **α)** [-1,15] **β)** (-4,2) **γ)** $\left(0,\dfrac{2\ln 2}{\ln 3}\right)$ **δ)** $\left(-\sqrt{e+3},-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\sqrt{e+3}\right)$

2. Να βρείτε τις τιμές του λ έτσι ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3}$ να έχει πεδίο ορισμού το R.
(Απ. $\lambda\geq 6$)

3. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, με f(x)>0 για κάθε x ∈ R. Αν $z=\ln f(x)+\ln f^2(x)\cdot i$ και $z^3=\overline{z}^3$ για κάθε x ∈ R, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=(x^2-x+1)f(x)$ για κάθε x ∈ R. Να δείξετε ότι f(1) = 0 ή f(1) = 1.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύει $f(x)+1=g(x)+e^x$ για κάθε x ∈R. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f και g.
(Απ. η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g όταν x>0)

6. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R με σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει f(f(x))=3x-2, για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι :

α) f(3x–2) = 3f(x) – 2.

β) η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η ευθεία y=1 έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει $f(x^2+x)+f(4x-2)=\ln(x^2-3x+3)$ για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0, έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R^* για την οποία ισχύει $2f(x)-3f(\frac{1}{x})=x^2$ για κάθε $x \in R^*$. Να υπολογίσετε :

α) το f(1)

β) τον τύπο της f.

(Απ. **α)** f(1) = -1 **β)** $f(x)=\frac{-2x^4-3}{5x^2}$)

9. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι συναρτήσεις $f(x)=|x-1|+2|x+1|+x$ και g(x)=2x+3 είναι ίσες.

(Απ. [-1,1])

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$, $g(x)=x^2-1$ και $h(x)=\sqrt{x-2}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση fogoh.

(Απ. $D_{f\circ g\circ h}=[2,3]\cup[7,+\infty)$ $(f\circ g\circ h)(x)=\sqrt{x^2-10x+21}$)

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=x^2$ και $f_3(x)=ημx$. Να γράψετε ως σύνθεση των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 τις ακόλουθες συναρτήσεις :

$g_1(x)=e^{ημ^2χ}$, $g_2(x)=e^{2ημx}$, $g_3(x)=ημ^2e^x$ και $g_4(x)=ημ^4e^{2x}$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=αx^2+βx$ και g(x) = x-2. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε $(fog)(x)=2x^2-3x-2$, για κάθε x ∈ R.

(Απ. α=2 και β=5)

13. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=2x^2-3x+2$, και η συνάρτηση g : R→R τέτοια ώστε $fog=gof$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h(x)=x διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε.

(Απ. Α(1,1))

14. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει f(x+y) = 2f(x) + 2f(y) για κάθε x, y ∈ R. Να δείξετε ότι :

α) f(0) = 0

β) η f είναι περιττή

γ) η f είναι σταθερή

15. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει f(x+y) = f(x) - f(y) για κάθε x, y ∈ R. Να δείξετε ότι :

α) f(0) = 0

β) η f είναι άρτια

γ) η f είναι σταθερή.

16. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=2^{1-x}+3^{1-x}-2$, x∈R.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να δείξετε ότι $2^{1-x}+3^{1-x}<5$ για κάθε x>0.
(Απ. **α)** η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R)

17. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=10^{x}+100^{x}-110$, x∈R.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
β) Να λύσετε την ανίσωση $10^{x}+100^{x}<2$.
(Απ. **β)** x<0)

18. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x}=1-x^{2009}$
(Απ. x=0)

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με f(x) = x + lnx και $g(x)\cdot e^{g(x)}=x$ για κάθε x>0.
Να δείξετε ότι :
α) η f είναι γνησίως αύξουσα
β) η g είναι γνησίως αύξουσα

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g : (0,+∞)→R, με $f(x)=x\cdot g(x)$ για κάθε x>0. Αν η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,+∞), να δείξετε ότι f(x+y)<f(x)+f(y) για κάθε x, y > 0.

21. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R, με $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ για κάθε x ∈ R.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
β) Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}+x+1}<\dfrac{x^{2}+2}{x^{2}+x+2}$
(Απ. **β)** x>0)

22.Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και η συνάρτηση g(x) = f(3x–5) – f(3–2x) για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

23. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R, με $f(x)=x^{2}+\lambda x+\lambda^{2}$, λ ∈ R.
α) Να δείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3\lambda^{2}}{4}$, για κάθε x ∈ R
β) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $(fof)(x)=3\lambda f(x)$ έχει πραγματικές ρίζες
γ) Αν ισχύει f(α) + f(β) +f(γ) = $\dfrac{9\lambda^{2}}{4}$, να δείξετε ότι α=β=γ.
(Απ. **β)** $0\leq\lambda\leq\dfrac{4}{3}$)

24. Θεωρούμε τη συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο R. Να δείξετε ότι, αν $f(f(x))=x$ για κάθε x ∈ R, τότε f(x) = x για κάθε x ∈ R.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + x^5 = 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Να δείξετε ότι (fof)(x) = x για κάθε $x \in R$.

(Απ. **α)** A(1,0))

26. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+2}$ δεν αντιστρέφεται.

27. Να βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x-3}}$ **β)** $f(x) = \ln\dfrac{2x-2}{x+1}$ **γ)** $f(x) = \dfrac{1-2^x}{2+2^x}$

δ) $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ **ε)** $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(Απ. **α)** $f^{-1}(x) = 3 + (1-x^2)^2$, $x \in [0,1]$ **β)** $f^{-1}(x) = \dfrac{2+e^x}{2-e^x}$, $x \in (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$

γ) $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln\dfrac{1-2x}{1+x}}{\ln 2}$, $x \in (-1, \dfrac{1}{2})$ **δ)** $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$, $x \in (0, +\infty)$

ε) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in R$ και f(R)=R. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

(Απ. $f^{-1}(x) = x^3 + 3x - 3$, $x \in R$)

29. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x + 2)\right) = 4$.

(Απ. **β)** $x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, $k \in Z$)

30. Θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη στο R. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(3,2) και B(5,9) τότε :

α) να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) να λύσετε την εξίσωση : $f\left(2 + f^{-1}(x^2 + x)\right) = 9$

γ) να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x^2 - 4x) - 6\right) < 2$.

(Απ. β) x=1 ή x=-2 **γ)** -1<x<5**)**

31. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(R)=R για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3e^{f(x)} = x + 3$, για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(\dfrac{e}{x})$.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $(x^3 - 27)(e^x - 2) < f(0)$.
(Απ. **β)** x=e **γ)** $f^{-1}(x) = x^3 + 3e^x - 3$, $x \in R$ **δ)** $\ln 2 < x < 3$)

32. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(1)+f(e)=2e+3$ και $f(x) - f(y) = \ln\frac{x}{y} + 2(x - y)$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$.
α) Να βρείτε το f(1) και το f(e)
β) Να βρείτε τον τύπο της f
γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
δ) Να λύσετε την ανίσωση $4(x^2 - 1) < \ln\frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8}$.
(Απ.**α)** f(1) = 2, f(e)=2e+1 **β)** f(x)=2x+lnx **δ)** -1<x<1)

33. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x
γ) Να δείξετε ότι f(x) < x για κάθε $x \in R$.
δ) Αν $f(2\alpha^2 - 1) + e^{f(\alpha)} = \alpha$, να βρείτε τον αριθμό α.
(Απ. **β)** Α(1,0) **δ)** α=1 ή $\alpha = -\frac{1}{2}$)

34. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = e^{2x+1} + 2x + 1$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1
β) Αν για τη συνάρτηση $g : R \to R$ ισχύει $g(x) = f^3(x) + 2f(x) + 1$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι :
i) η g είναι 1 – 1
ii) $g^{-1}(4) = 0$

35. Δίνεται η αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει $(fof)(x) = x^2 - x - 3$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι f(3)+f(-1)=2.

36. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι :
α) f(1) = 1
β) Η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το R και τύπο $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν είναι 1-1.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $(fofof)(x) = 2x - 7$ για κάθε $x \in R$, f(1) = 3 και f(3)=9.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να βρείτε το $f^{-1}(1)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=9$

(απ. **β)** 8 **γ)** x= -5)

38. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z \in C^*$ και η συνάρτηση f : R→R, με f(0)=0 και $f\left(f(x)-|z|\right)=x-1+|z|$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι 1-1

β) f(1)=1

γ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε :

i) η f είναι γνησίως αύξουσα **ii)** $|z|<1$

39. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R με $f(f(x))=-x$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι 1-1

β) η f δεν είναι γνησίως μονότοτονη

γ) η f είναι περιττή

40. Δίνεται η συνάρτηση f : R^*→R για την οποία ισχύει $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y \in R^*$. Αν ισχύει ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα τότε :

α) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

γ) Να δείξετε ότι $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x \in R^*$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$

(Απ. **α)** x=1 **δ)** x=1)

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(R)=R για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να δείξετε ότι f(0)=0

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα το 0 να δείξετ ότι :

i) η f είναι αντιστρέψιμη **ii)** $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in R$.