ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3 : Όρια συναρτήσεων στο x_0 –
Όρια συναρτήσεων στο $\pm\infty$

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Όρια στο $x_0 \in R$

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-5x+6}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}}$

2. Αν κ+λ+ρ = 0, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^\nu+\lambda x^\mu+\rho}{x-1}$, ν, μ θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1.

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2-1}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-\sqrt{x-2}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{x-\sqrt{x+1}-1}$

4. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο [0,+∞), έχει σύνολο τιμών το R και ισχύει $f^4(x)-3f^2(x)=x^2-5$ για κάθε $x\geq 0$, τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^{-1}(x)-3}{x^3-2x^2+x-2}$.

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}$

6. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x+6}{x\sqrt{x}-7\sqrt{x}+6}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3x-1}{(x+1)\sqrt{x+3}+14\sqrt{x+3}-6x-26}$

7. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ και $z\in C$ με $|z|\geq 1$. Αν ισχύει ότι $|\eta\mu x+z|\leq f(x)\leq |1+z\eta\mu x|$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι :

α) $|z|=1$ **β)** $f(x)=\sqrt{\eta\mu^2 x+2\mathrm{Re}(z)\eta\mu x+1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=z+\bar{z}$

8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-5x+1|-|x^3-3x+1|}{x}$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-x|-|x-1|}{x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|}{||x|-1|}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-3x+2$ και η συνάρτηση g με $g(x)=|(x-\lambda)\cdot f(x)|$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να υπάρχει στο R το όριο $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{g(x)-g(\lambda)}{x-\lambda}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x+5}{x-2}=3$. Να βρείτε τα όρια : **α)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)+6}{x-2}$.

12. Αν $x^2+2x\le f(x)\le 2x^2+1$, για κάθε $x\in R$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$.

13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)\eta\mu\dfrac{x}{x-1}]$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}$

14. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)-6f(x)]=-9$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

15. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}[f^2(x)+g^2(x)-4f(x)-6g(x)]=-13$, να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

16. Έστω $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)+g^2(x)\le\eta\mu^2x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

17. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}[4f(x)+3g(x)]=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

18. Εάν $z\in C$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|z+x\bar{z}|-|z|}{x}=|z|$, να δείξετε ότι $z\in R$.

19. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g ορισμένες στο R, για τις οποίες ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{x-1}=3$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}-1}=4$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{g(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}[(f(x)-x)\eta\mu\dfrac{1}{x-1}]$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^x+x-1$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να υπολογίσετε τα όρια : **i)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)$

(Απ. **α)** 0 **β)** 0)

21. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot σφx)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xημx}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφx-x}{x^2}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ^2(αx)}{1-συν(βx)}$, $α,β\neq 0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+ημx}-συνx}{1-συνx}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to π}\dfrac{ημ3x+συν2x-1}{συν4x+ημ2x-1}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to π}\dfrac{ημ\frac{x}{2}-1}{συνx+1}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{συνx}-\sqrt{συνx}}{ημ^2x}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx\cdot ημ2x\cdot\ldots\cdot ημ(νx)}{ημ[(ν+1)x]\cdot ημ[(ν+2)x]\cdot\ldots\cdot ημ(2νx)}$

θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^3}}{εφx - ημx}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to \frac{π}{2}}(εφx\cdot εφ2x+σφx\cdot σφ2x)$ **ια)** $\lim\limits_{x\to α}\left[(x-α)\cdot σφ\dfrac{πx}{α}\right]$

ια) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+ημx}-\sqrt[3]{x+8}}{x-x^2}$

22. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx\cdot ημ2x\cdot\ldots\cdot ημ(νx)}{x^ν}=24$, να βρείτε το φυσικό αριθμό ν.

23. Αν για κάθε $x\in(-\frac{π}{2},\frac{π}{2})$ ισχύει $ημ^2x\leq g(x)\leq x^2$, να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)συν\frac{π}{x}}{ημ4x}$.

24. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-x}{x^2+3x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+xf(x)+xημx}{f^2(x)+x^2+ημ^2x}$

25. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $ημx - x^2\leq f(x)\leq ημx+x^2$, να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2x}{x+ημx}$

26. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\eta\mu x}{x-\frac{\pi}{6}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

27. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση f(x)=f(x+3) και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-1}{x-4}$.

28. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[4]{x}-2x}{x^2-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{3x^2-2x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}$

29. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g : R $\to$ R, f άρτια και g περιττή, για τις οποίες ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\right]=5$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$.

30. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\in$ R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$.

31. Έστω η συνάρτηση f : R $\to$ R για την οποία ισχύει f(x+y) = f(x) + f(y) για κάθε x, y $\in$ R. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x}=2012$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

32. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\eta\mu x}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}-\sqrt[3]{\eta\mu x}}{\sqrt[3]{x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x-x^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}\right)$

33. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-(2+\alpha x)}{x^2}$, α$\in$R. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η f να έχει στο $x_0=0$ όριο πραγματικό αριθμό. Έστω $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=m$. Αν g είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R^*, τέτοια ώστε : $\dfrac{g(x)}{\eta\mu^4 x}=\dfrac{m}{x^2\eta\mu^2 x}+\dfrac{f(x)}{x^4}$ για κάθε x κοντά στο 0, να δείξετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ και να το υπολογίσετε.

34. Έστω οι συναρτήσεις f, g : R$\to$R ώστε : $\lim\limits_{x\to 0}[xf(x)-\eta\mu 3x]=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu 5x)g(x)-x^2}{x^2}=8$. Να βρείτε, αν υπάρχουν ,τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)g(x)]$.

35. Έστω $f: R \to R$ με $f^3(x)+f(x)=x^5$ για κάθε $x \in R^*$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

36. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sigma\upsilon\nu(\alpha x)|}{\eta\mu^2(\alpha x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{x^{2011}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(2010x)}{-x|x|}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x\eta\mu x|}{(x-\eta\mu x)\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}$

37. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\eta\mu 2x}{g(x)(x\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{x+1}-1)}=-\infty$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

38. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha>0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

39. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5} g(x)=+\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3f(x)+4g(x)}{f^2(x)+g^2(x)}=0$.

40. Έστω $f: R\to R$ συνάρτηση άρτια, τέτοια ώστε να ισχύει $x^3\cdot f(x)\ge x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(Απ. $+\infty$)

41. Έστω f(x)=συνx, g(x)=ημx. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)\cdot f(2x)}{[1-f(x)]^2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{g^\nu(x)}$, $\nu\in N^*$.

(Απ. **α)** $+\infty$)

42. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: R\to R$. Αν $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της f στο $x_0=0$.

43. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-(\rho-1)x-\rho}{-x-1}, & x<-1 \\ 2\rho x+\kappa\sqrt{x+2}+3, & x\geq -1 \end{cases}$. Να βρείτε τους αριθμούς ρ, κ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(-1,5).

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\lambda x^2-(\lambda^2-2\lambda)x-\lambda^2}{|2x-\lambda|}$. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \frac{\lambda}{2}} f(x)$ και στη συνέχεια να το υπολογίσετε.

45. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των αριθμών λ και μ :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\lambda-2)x^2+\lambda x-4}{x^2-4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-\lambda x-\lambda^2}{|x-1|}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\lambda x^2+(\mu-1)x+4}{x^2-4x+4}$

46. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε να ισχύει :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1}=2$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha|x^2-5x+4|+\beta|x-3|-10}{x^2-3x+2}=2$

47. Έστω $z\in C$ και $f:R\to R$ με $f(x)=\dfrac{|z|x^3-|z+1|x^2+1}{x^2-1}$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, να δείξετε ότι $|z|=6$

β) Αν $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\dfrac{3}{2}$, να δείξετε ότι $z=-1$

48. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+\alpha x+\beta}{|x+1|}$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Στη συνέχεια να το υπολογίσετε.

49. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=1$.

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+f(x)}{2x+\eta\mu x}$.

50. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+1)=x^3-x^2+2x$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x-1|}}$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\nu \in N^*$ τέτοιος ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu - \nu x + \nu - 1}{(x-1)f(x)} = \dfrac{1}{2}$.

51. Εστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R ώστε $2x \le f(x) \le x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.
β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$.

52. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, ώστε $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in R$ και $f(0)\neq 0$. Να δείξετε ότι :
α) $f(0) = 1$
β) $f(x)>0$, για κάθε $x \in R$
γ) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in R$
δ) $f(\nu x) = \left[f(x)\right]^\nu$, $\nu \in N^*$
ε) Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x=0$, τότε η f είναι “1-1”
στ) Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, τότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 8$.

Όρια στο $\pm\infty$

53. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-3x)(5-4x^3)}{3x^4+5x^3-8x+1}$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+|x^3-1|+3|x+2|}{5x^2-3|x^2-4|+|x+3|}$

54. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt[3]{8x^3+1}}$ **β)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+x+2}-2\right)$

55. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+10}+2x\right)$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ **δ)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ε) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{9x^2+x+3}-5x\right)$

56. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ **γ)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\eta\mu\frac{2}{x}}{\eta\mu\frac{1}{x}}$ **δ)** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{7x^2+4}$

57. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{x}\right)$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\eta\mu(x^2-1)-x^2\sigma\upsilon\nu(x+1)}{x^3+1}$

58. Να μελετήσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του αριθμού λ :

α) $\lim_{x\to+\infty}\left[(\lambda^2\text{-}1)x^3+(\lambda+1)x^2-3\lambda x+5\right]$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{(\lambda-1)x^3+x-1}{\lambda x^2+1}$

59. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε να ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-\alpha x-\beta\right)=0$

60. Να μελετήσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων τους :

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\lambda x\right)$ **β)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+(\eta\mu\theta)x\right)$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

61. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x\right)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

62. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\alpha x-\beta\right)=-2$

63. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $x^2 f(x)=\sqrt{x^2+1}-\text{συν}^2 x$ για κάθε $x\in R$ να υπολογίσετε τα : **α)** f(0) **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x^4+x^2}+\lambda x^2$, $\lambda\in$R.

α) Να βρείτε το όριο : α = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$ (ως συνάρτηση του λ).

β) Για την παραπάνω τιμή του α, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x^2-1]$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot \text{ημ}\dfrac{2}{x^2}]$

65. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3{\cdot}2^{3x-1}-4^{x+1}+2{\cdot}5^x-11)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2{\cdot}2^{2x+1}+3^{x+1}-9}{4^x+3^{x-2}+6}$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3{\cdot}2^{x+1}+4{\cdot}5^{x+1}-1}{7^x+6^{2x-1}}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{-3x}+4{\cdot}5^x+1}{3{\cdot}e^x+2^{-x}}$

66. Να μελετήσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot\lambda^{x+1}+3^{2x-1}-9}{\lambda^x+9^{x-2}+6}$ για τις διάφορες τιμές του θετικού αριθμού λ.

67. Να βρείτε τα όρια : **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln(3x)-\ln(x^2+1)\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

68. Αν για τις συναρτήσεις f, g που ορίζονται στο R, ισχύουν $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=\lambda$ $\in$ R και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\mu\in$ R, να δείξετε ότι $\lambda^2\geq 4\mu$.

69. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2f^2(x)+1}{x^2f(x)+x}=0.$$

70. Έστω f : R$\to$R τέτοια ώστε : $f^3(x)+f(x)=2e^x$ για κάθε $x\in$ R.

α) Να βρείτε την τιμή f(0)

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f

δ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

ε) Να λύσετε την ανίσωση lnf(x)>0

στ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

71. Έστω f : (0,+∞) →R τέτοια ώστε : $f^3(x)+f(x)=x^3$ για κάθε x ∈ (0,+∞).

α) Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x>0

β) Να υπολογίσετε τα όρια : A = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ και B = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

72. Έστω z ∈ C^* και f : R →R με $f(x)=|z|x+1-\sqrt{|z|^2x^2-2|z|x+1+|x|}$.

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2|z|$

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{3}{2}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

(Απ. **β)** $|z|=1$)