ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 : Συνέχεια συνάρτησης – Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : R→R με $\left|xf(x) - x^2\right| \leq \eta\mu^4 x + 2x^2$ για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι f(0)=0.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g : R→R για τις οποίες ισχύει $f^2(x) + g^2(x) \leq \eta\mu^2 x$ για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0=0.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g : R→R για τις οποίες ισχύει $f^{2\kappa}(x) + g^{2\kappa}(x) \leq x^{2\nu}$ για κάθε x ∈ R και κ, ν ∈ N^*. Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0=0.

4. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R, συνεχής στο $x_0 = 2$ και (x-2)f(x)≥ $x^3 - 2x - 4$ για κάθε x ∈ R. Να βρείτε το f(2).

5. ΄Εστω f : R→R^* με $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ για κάθε x,y ∈ R. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

6. Έστω συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

7. Δίνεται συνάρτηση f : R→R συνεχής στο x_0=6 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)}{x-3} = 2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

8. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ και $g(x) = x^2 + 3x - 1$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, y_0)$ με x_0 ∈(1,2).

9. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : R→(0,+∞) για τις οποίες ισχύει f(α)=2α και g(β)=-2β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 ∈ (α,β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=2x_0+ g(x_0)$.

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : (0,+∞)→R για την οποία ισχύει 2lnx – x < f(x) < $\ln^2 x$ +x για κάθε x>0. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (e^2+1)\ln x - x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1,e).

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 3x^2 + x = 1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει f(1) = 0 και $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι :

α. η f αντιστρέφεται

β. η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1).

14. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής στο [0,1] με f(0)=f(1). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{4})$.

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to (0,2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = 2f(\xi) - 3\xi$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής στο [2,3]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{5 - 2x_0}{x_0^2 - 5x_0 + 6}$.

17. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R με f(3) = -5 και – 1, 4 δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης f(x)=0. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(0) \cdot x^3 + 2x + 5}{x^2 + 4}$.

18. Να λύσετε στο (0,2π) την ανίσωση : $\eta\mu 2x - \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$.

19. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο R με $\lim\limits_{x \to 2}[f(x) \cdot \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}] = \dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x \to 2}[g(x) + \dfrac{\eta\mu(x - 2)}{x - 2}] = \dfrac{3}{2}$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in R$, τότε :

α) να βρείτε το f(2) και το g(2)

β) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) + f^2(x_0) = \frac{g(x_0)}{x_0 - 2}.$$

20. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [2,10] \to Z$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

21. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [2,10] \to R$ με f(2) = 10 και f(x)·f(f(x)) = 5. Να βρείτε το f(10) και το f(5).

22. Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ με f(1) = 3 και f(2) = 5. Αν η εξίσωση f(x) = 4 είναι αδύνατη στο R να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

23. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [1,4]. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{f(1) + 3f(2) + 5f(3) + f(4)}{10}$.

24. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R με f(0)=0 και z∈C τέτοιος ώστε $\left|\frac{z}{z-i}\right| = \frac{1}{2}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C της εικόνα M(z).

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και ο γεωμετρικός τόπος του **α.** ερωτήματος έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

25. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R με f(x)≠0 και $xf^3(x) + f(x) = -e^x$ για κάθε x∈R. Αν επιπλέον ισχύει $(z\bar{z} + 2009)\cdot \lim\limits_{x\to 2010} f(x) = z\bar{z} - 4|z| + 3$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C της εικόνα M(z), z∈C.

26. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x^3 + \frac{i}{x-i}$, x ∈ R.

α. Να δείξετε ότι ένας μόνο από τους μιγαδικούς αριθμούς z είναι φανταστικός.

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\text{Im}(z)\cdot \eta\mu x\right]$.

γ. Αν Re(z) = Im(z), να υπολογίσετε το z^{2010}.

27. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο R με f(A) = g(A) = [0,1] και z_1, z_2 ∈ C με $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $|z_1| f(x) + |z_2| g(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο [0,1].

28. Δίνεται ο αριθμός z ∈ C–{i} και η συνάρτηση f : R→R συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R τέτοια ώστε $|z-i|\cdot f(x) + |z+i|\cdot f(1-x) = |z-i| + |z+i|$, για κάθε x∈R.

α. Να δείξετε ότι $|z-i| = |z+i|$

β. Να δείξετε ότι z ∈ R

γ. Να βρείτε την τιμή $f(\frac{1}{2})$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(8x^2) < 1$

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x + x\cdot f(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο R.

29. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f :[1,9]→R με $f(1)\cdot f(3)\cdot f(9) = 27$ και f(x)≠0 για κάθε x∈[1,9]. Να δείξετε ότι :

α. f(x) > 0, για κάθε x∈[1,9]

β. υπάρχει ξ ∈[1,9] τέτοιο ώστε f(ξ) = 3

γ. υπάρχει x_0 ∈[1,9] τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

30. Έστω f :[1,3]→R συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Έστω z = f(3)+f(1)·i, τέτοιος ώστε Re(iz+z)=2. Να δείξετε ότι :

α. $f(1) < \frac{f(1)+f(2)}{2} < f(2)$ και $f(2) < \frac{f(2)+f(3)}{2} < f(3)$

β. υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ∈ (1,3) τέτοια ώστε $f(\xi_2) - f(\xi_1) = 1$

31. α) Έστω συνάρτηση $f : \Delta \to R$, όπου Δ τυχαίο διάστημα και f συνεχής και 1 – 1 στο Δ. Τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

β) Αν η συνάρτηση f συνεχής και 1 – 1 στο Δ=[0,2009] με $f(2009) < f(0) < 0$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,2009]$.

32. Έστω $f :[0,4]\to R$ συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση, με f(0)=5 και

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-4x)f(x)+\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3}-1}=18.$$

α. Να βρείτε την τιμή f(4)

β. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f και τα σύνολο τιμών της f(A), A=[0,4].

γ. Να δείξετε ότι η ευθεία y=4 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα μόνο σημείο

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}$.

33. Έστω συνάρτηση $f : R\to R$ συνεχής με $f(0) = -1$ και $f(x) \neq x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι :

α. Να δείξετε ότι $f(x) < x$ για κάθε $x\in R$

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$