

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Τάξη : Γ' Λυκείου**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5 : Η έννοια της παραγώγου -  
Κανόνες παραγωγίσης -  
Ρυθμός μεταβολής**

**39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $|f(x) - x| \leq x^2$ . Να βρείτε το  $f'(0)$ .
2. Έστω  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(1) = -1$  και  $f(x) \leq 2x^2 + 2x - 5$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $f'(1)$ .
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(x-2)f(x) \geq x^2 - \eta\mu x$  για κάθε  $x \in (2, +\infty)$ , με  $f(2)=0$ . Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=2$ .
4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμες στο  $x_0 = 1$ , για τις οποίες ισχύει  $f(1) = g(1) = 0$  και  $f(x) + x \leq g(x) + x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $f'(1) - g'(1) = 1$ .
5. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 3$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο  $x_0=0$ .
6. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  για την οποία ισχύει  $|f(x) - 3x| \leq \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι :
  - α)  $f'(0) = 3$
  - β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(9x) - f(x)}{f(2x)} = 4$
7. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  να υπολογίσετε το όριο 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) + f(x_0 + 2h) - 3f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$$
.
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$ , για την οποία ισχύει  $f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $f'(0)$ .
9. Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς στο  $x_0 = 0$  και  $f^2(x) + g^2(x) \leq x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ . Να δείξετε ότι  $f'(0) = g'(0) = 0$ .
10. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$  με  $f'(0) = \alpha$ , η γραφική της παράσταση δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι :
  - α.  $f(0) = 1$
  - β.  $f'(x_0) = \alpha f(x_0)$  για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
11. Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει :  $f(x+y) = yf(x) + xf(y) + f(x) \cdot f(y) + xy - x - y$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = 1$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να δείξετε ότι :
  - α.  $f(0) = 1$

- β. η  $f$  παραγωγίζεται σε κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $g(xy) = g(x) - g(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $xg'(x) + yg'(y) = 0$ .
13. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :
- $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)$
  - $f(x) = \sqrt[5]{(2x-1)^3}$
  - $f(x) = \sqrt[6]{x^8}$
14. Να βρείτε πολυώνυμο  $P(x)$  τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει :  
 $P(x) + P'(x) - P''(x) = x^3 - 7x^2 - 20x + 18$
15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 2x$ .
- Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
  - Να βρείτε το  $(f^{-1})'(3)$ .
16. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $g(x) \geq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $g(0) > 0$ .
17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = x\eta\mu \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  και  $g(x) = -x^6 \cdot f''(x) - x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
  - Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$
  - Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, \frac{2}{\pi})$  τέτοιο ώστε  $g'(x_0) = 0$ .
18. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} x + \lambda\eta\mu \frac{\pi x}{4}, & x < 1 \\ x^2 + \kappa x, & x \geq 1 \end{cases}$ . Να προσδιορίσετε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .
19. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - x^3$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  σε τυχαίο σημείο της  $M$  έχει και άλλο κοινό σημείο με τη  $C_f$ .
20. Να βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x + 3} = 4$  και η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(-1, 4)$  είναι κάθετη στην ευθεία

$$\delta : x + 2y - 5 = 0.$$

- 21.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^{ax+\beta}$  και  $g(x) = x^2 - x + 1$ . Να βρείτε τις τιμές των αριθμών  $a$  και  $\beta$  ώστε οι καμπύλες με εξισώσεις  $y = f^{(4)}(x)$  και  $y = g(x)$  να έχουν κοινό το σημείο  $A(1, g(1))$  και συγχρόνως κοινή εφαπτομένη σ' αυτό.
- 22.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 + 6x - 3$ .
- α.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1
- β.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_{f^{-1}}$  της  $f^{-1}$  στο σημείο της  $A(5, f^{-1}(5))$
- 23.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 - 3x + \beta$ . Να βρείτε τους αριθμούς  $a, \beta, \gamma$  ώστε η ευθεία  $y = \beta x + \gamma$  να εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, 2)$ .
- 24.** Να προσδιορίσετε τον αριθμό  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $y = \lambda x + 1$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = -\frac{1}{x}$ . Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
- 25.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 - 2x \sin \alpha + 1 - \eta \mu \alpha$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .  
Να υπολογίσετε το  $\alpha$  και μέσω αυτού να ορίσετε την  $f(x)$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να δέχεται τον άξονα  $x'x$  ως εφαπτόμενη.
- 26.** Να βρείτε το θετικό αριθμό  $\alpha$  ώστε η διχοτόμος της γωνίας  $1^{\text{ου}}$  και  $3^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου του ορθοκανονικού συστήματος  $x'x$  και  $y'y$  να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = a^x$ .
- 27.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = x^2 - 5x + 6$  και τα σημεία της παραβολής  $P_1(x_1, y_1)$  και  $P_2(x_2, y_2)$  με  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 5$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη προς τη χορδή  $P_1P_2$ .  
(Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2006 – Μαθηματικών)
- 28.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln(\kappa x)}{x}$ ,  $\kappa > 0$ ,  $x > 0$ .
- α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(\lambda, f(\lambda))$ ,  $\lambda > 0$ .
- β.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(\lambda, f(\lambda))$  διέρχεται από σταθερό σημείο καθώς το  $\kappa$  διατρέχει το διάστημα  $(0, +\infty)$ .
- 29.** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Να δείξετε ότι :
- α.** Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε τυχαίο σημείο, σχηματίζει με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  τρίγωνο με σταθερό εμβαδό
- β.** Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε τυχαίο σημείο δεν έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με

τη  $C_f$ .

**30.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ ,  $f$ ,  $g$  για τις οποίες ισχύει  $g'(x) \neq 0$ ,  $g'$  συνεχής στο 200 και  $f(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν το σημείο  $A(200,0)$  είναι κοινό σημείο των  $C_f$  και  $C_g$  να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$ .

**31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(x) = x - e^{3x} - 2 + f'(x)$  και  $f(x) = x + \frac{1}{9}f''(x)$ .

**α)** Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

**γ)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

**32.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει  $f(\eta\mu x) = x - \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**α.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

**β.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \xi$

**γ.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$ .

**33.** Η κορυφή μιας σκάλας μήκους 5m ακουμπάει σε έναν τοίχο και σε σημείο που απέχει 4m από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή  $t_0$  η σκάλα γλιστράει και ο ρυθμός πτώσης του άνω άκρου είναι 0,1 m/sec. Να βρείτε τη χρονική στιγμή  $t_0$ :

**α)** το ρυθμό με τον οποίο το άλλο άκρο της σκάλας απομακρύνεται από τον τοίχο

**β)** το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που ορίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος.

**34.** Σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  σχεδιάζουμε την ημιευθεία  $\varepsilon$ ,  $y=x+1$ ,  $x \geq 0$ . Ένα σώμα  $A$  κινείται πάνω στην  $\varepsilon$  και έστω η  $B$  η προβολή του στον ημιάξονα  $Ox$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  οι συντεταγμένες του  $A$  είναι (3,4) και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s. Τη χρονική στιγμή  $t_0$  να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :

**α.** του εμβαδού (OAB)

**β.** της απόστασης  $d=(OA)$

**γ.** της γωνίας  $\theta = \widehat{AOB}$ .

- 35.** Έστω η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  στο σημείο  $A(6, f(6))$
  - Ένα σώμα κινείται στη  $C_f$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  το σώμα βρίσκεται στο σημείο  $A(6, f(6))$  και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s. Τη χρονική στιγμή  $t_0$  να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :
    - της τεταγμένης του σώματος
    - της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(6, f(6))$  με τον άξονα  $x'x$ .
- 36.** Έστω  $z \in \mathbb{C}$  με  $|iz + 2 - i| = |z - 5 - 6i|$ .
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων  $M(z)$
  - Η εικόνα  $M(z)$  κινείται στο γεωμετρικό τόπο του **α)** ερωτήματος και τη χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $M(z) = A(3, 4)$  και το  $\text{Re}(z)$  αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s. Τη χρονική να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :
    - του  $\text{Im}(z)$
    - του  $|z|$ .
- 37.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $x_0 = 0$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - e^{2x}}{\eta\mu 3x} = 0$ .
- Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$
  - Αν  $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ , να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_h$  στα σημεία  $A(0, f(0))$  και  $B(0, h(0))$  είναι παράλληλες.
- 38.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι 1-1 και  $f^{-1}(x) = e^x + x^3 - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε :
- Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
  - Να δείξετε ότι  $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 3f^2(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
  - Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  είναι η  $\varepsilon : y = x$
  - Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $(e, f(e))$  είναι κάθετη στην ευθεία  $\eta : y + (e+3)x - 200 = 0$ .