ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 : Θεώρημα Rolle –
Θεώρημα μέσης τιμής –
Συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής**

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 2 - 3\ln x$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 6x^2 = x + 1$, δε μπορεί να έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x^2-xημx-συνx = 0 έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3\kappa x^2 + 3\lambda = 9x^2 + 6\kappa x + 2\lambda x$, κ,λ ∈ R, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,3).

5. Αν f(1)=1, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2 - \dfrac{f(x)}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

6. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2], f(x) > 0 για κάθε x ∈ [1,2] και $f(1)f'(2) = f'(1)f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (1,2) τέτοιο ώστε $[f'(\xi)]^2 = f(\xi)f''(\xi)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [1,3], παραγωγίσιμη στο (1,3) με 3f(1)=f(3)+6. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από το σημείο Α(0, x_0^2).

8. Δίνεται η συνάρτηση f, άρτια και παραγωγίσιμη στο [-2,2]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (-2,2) τέτοιο ώστε $f'(\xi) + \eta\mu\xi = 8x$.

9. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R.

α. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f΄.

β. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄ περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

10. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [-8,8], παραγωγίσιμη στο (-8,8) και f(-8) = f(8) = 0. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (-8,8) τέτοιο ώστε $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

11. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με α>0 και f(α)=f(β)=0. Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε ξf΄(ξ)=f(ξ) .

β) Αν f΄΄(x)≠0 για κάθε x∈(α,β) τότε το ξ είναι μοναδικό .

γ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(ξ,f(ξ)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

12. Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος ενός αυτοκινητόδρομου με αποστάσεις ΑΒ=200 km, ΒΓ = 400 km και ΑΓ=600 km. Ένα αυτοκίνητο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φθάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το αυτοκίνητο τη μία χρονική στιγμή είχε διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι την άλλη (η συνάρτηση που εκφράζει το διάστημα συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.
(**Υπόδειξη :** Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g(t) = s(t+3) – 2s(t))
(Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2009 – Μαθηματικών)

13. Έστω f : R $\to$ R, παραγωγίσιμη στο R με f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in$ R τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}=8$ και επίσης $f^3(1)+f(2)=f^2(1)\cdot f(2)+f(1)$.
α) Να βρείτε το f(0)
β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f έχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.

14. Έστω f : R $\to$ R, παραγωγίσιμη στο R. Αν ο μιγαδικός αριθμός $w=\dfrac{f(4)+f(2)i}{2+i}$ $\in$ R, να δείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(2,4) τέτοιο ώστε τα σημεία Α(f(ξ),ξ), Β(f'(ξ),1), Ο(0,0) να είναι συνευθειακά.

15. Έστω f : R $\to$ R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in$ R. Αν ισχύει $f^2(x)+4=4f(x^2)$ για κάθε x $\in$ R. Να δείξετε ότι :
α) υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$
β) υπάρχει ξ $\in$ (-1,1) τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

16. Έστω f : R $\to$ R, παραγωγίσιμη στο R. Οι μιγαδικοί αριθμοί $w_1=f(1)+f(2)i$, $w_2=f(3)+3i$ είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-4z+\alpha=0$, α $\in$ R. Να δείξετε ότι :
α) η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο (1,3)
β) υπάρχει ξ $\in$ (1,3) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

17. Έστω f : R $\to$ R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄΄ συνεχή στο R και f(2)·f(4) $\neq$0 . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της Α(2,f(2)) είναι παράλληλη στην ευθεία η : $f'(4)\cdot x-\dfrac{f(2)}{f(4)}y+2010=0$. Να δείξετε ότι :
α) υπάρχει ξ $\in$(2,4) τέτοιο ώστε $f(\xi)\cdot f''(\xi)+\left(f'(\xi)\right)^2=0$
β) η εξίσωση $xf(x)f''(x)-x+1=0$ έχει μία τολάχιστον λύση στο (0,4).

18. Να δείξετε ότι :

α) $\varepsilon\varphi\alpha < \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha} < \varepsilon\varphi\beta,\quad 0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

β) $\dfrac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \le \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha \le \dfrac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta},\quad 0<\alpha\le\beta<\dfrac{\pi}{2}$

γ) $\dfrac{1}{\alpha+1} < \ln(1+\dfrac{1}{\alpha}) < \dfrac{1}{\alpha},\ \alpha>0$

19. Να αποδείξετε ότι $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$

20. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}) = \dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

21. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(α,f(α)) τέμνει τη C_f στο Β(β,f(β)), με β > α, να δείξετε ότι :

α) η $f\,'$ δεν είναι 1 – 1

β) υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

22. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο [α,β] συνάρτηση f για την οποία ισχύουν f(α)=β+4α, f(β)=α+4β. Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=9$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,6] για την οποία ισχύει 2f(4)=f(2)+f(6). Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,6)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

24. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,3] με f(1)=2 και $-3 \le f'(x) \le 1$ για κάθε $x\in(1,3)$. Να δείξετε ότι $|f(3)| \le 4$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο [1,2], παραγωγίσιμη στο (1,2) με f(1) = 2 και f(2) = 4. Να δείξετε ότι :

α) υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2(3-x_0)$

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$.

26. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)+3f(x)=0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{-3x}}$ είναι σταθερή στο R.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(0,1).

27. Για τη συνάρτηση $f : R \to R$, ισχύει $|f(\alpha) - f(\beta)| \le 1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R.

28. Να αποδείξετε ότι $(x+\rho)^4 + x^4 + \rho^4 = 2(x^2 + \rho x + \rho^2)^2$ για κάθε $x \in R$.

29. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει $f'(x) + (2x+3)f(x) = e^{-x^2+1}$, για κάθε $x \in R$ και f(0)=e.

30. Να βρείτε συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύουν $2xf(x) = (x^2+1)[f(x) - f'(x)] + 1$ και $f(0) = 0$.
(Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2006 – Μαθηματικών)

31. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f(0) = 2f΄(0)=1 και $f''(x)f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)f'(x)$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}e^x$, για κάθε $x \in R$

β) $f^2(x) = e^x$, για κάθε $x \in R$

γ) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, για κάθε $x \in R$

32. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ τέτοια ώστε f(xy)=f(x)+f(y) για κάθε $x, y \in R$ και $f'(1) = 1$.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in R$. Αν f(1) = $f'(1)$=2 και g(1)= $g'(1)$ = 1, να δείξετε ότι f(x)–g(x) = x.

34. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει f(x+y) = f(x)+f(y)+xy+y για κάθε $x,y \in R$ και $f'(0)$=0.

35. Έστω $f : R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f(1)=1, f(2)= –1, f(3)=0 και $f'(4) = 0$. Να δείξετε ότι :

α) υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

β) υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 2\xi \cdot f'(\xi)$

36. Έστω $f : R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄(–1)=10 και f΄(–2)=20 και $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = e^{-2\xi}$

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(0,f(0))

γ) η εξίσωση $f''(x) + 2f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (–2,0)

37. Έστω f : R → R, παραγωγίσιμη στο R με f(x)≠0 για κάθε x∈R και f(1)·f(2)= f(3)·f(4). Να δείξετε ότι :

α) υπάρχει $\xi_1 \in [1,2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi_1) = f(1)\cdot f(2)$

β) υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

38. Έστω f : [λ,1] → R, παραγωγίσιμη με $f'(x) \le 3$ για κάθε x∈[λ,1], $f(\lambda)= (\lambda+1)^3$, f(1)=8.

α) Να βρείτε την τιμή του λ∈R

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ R τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) + f(\xi) + 2\xi = 1$

39. Έστω f : R → R, παραγωγίσιμη στο R και ο μιγαδικός αριθμός z με z ∉ R τέτοιος ώστε $z + \frac{1}{z} = f(1)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(2)$.

α) Να δείξετε $|z| = 1$

β) Να δείξετε ότι $f^2(2) - f^2(1) < 0$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (1,2) τέτοιο ώστε $f(\xi)\cdot f'(\xi) = -1$

40. Έστω f συνεχής στο [α,β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με f΄΄ συνεχή στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν γ, δ ∈ (α,β) με γ<δ και f(γ)<0<f(δ), να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$

γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

41. Έστω f : R → R, παραγωγίσιμη στο R με f(x)≠0 για κάθε x∈R. Αν $f(\frac{1}{2}) = 1$ και $f'(x)\cdot f(1-x) = e$ για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f.

42. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) για την οποία ισχύει f(1)=2 και η εφαπτομένη που διέρχεται από το τυχαίο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ της C_f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα, έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.