ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7 : Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει η σχέση $\ln\sqrt{x}<x-\sqrt{x}$.

2. Έστω $g(x)=x\alpha^x\ln\alpha+1-\alpha^x$, $\chi\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^x-1}{x}, & x\neq 0\\ \ln\alpha & x=0\end{cases}$, α>0, α≠1

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της g και να βρείτε το πρόσημο του g(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x≠0

γ) Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

3. Έστω $f:R\rightarrow R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)<0$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+4}-2}=-4$.

α) Να βρείτε τις τιμές f(0) και $f'(0)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

4. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της [0,6]. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0,1) και $f'(x)>x$ για κάθε $x\in[0,6]$, να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,6]

β) $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,6]$

5. Να δείξετε ότι :

α) $\dfrac{\ln\beta}{\alpha}>\dfrac{\ln\alpha}{\beta}$, $1<\alpha<\beta$

β) $x^x(2-x)^{2-x}\geq 1$, $x\in(0,2)$.

γ) $x^2-x^3<\dfrac{1}{2}$, $x\geq 0$

δ) $\sqrt{1+x}\leq\dfrac{x+10}{6}$, $x\geq 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha^x-x^3\cdot\beta^x}{\beta^x}$, $\alpha,\beta>0$ και α<β.

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

β) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού λ που ικανοποιούν τη σχέση $(\alpha^{\lambda^3}-\lambda^9\beta^{\lambda^3})\beta^{7\lambda-6}>[\alpha^{7\lambda-6}-(7\lambda-6)^3\beta^{7\lambda-6}]\beta^{\lambda^3}$.

7. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=f(β), να αποδείξετε ότι, αν $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(x)>f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο [α,β] τέτοια ώστε $g'(x) < g(x)\cdot \ln 2$ για κάθε $x \in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $g(\alpha) > g(\beta)\cdot 2^{\alpha-\beta}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [2,8] με $f''(x)>0$ για κάθε $x \in[2,8]$. Να δείξετε ότι $f(x) < \frac{f(8)-f(2)}{6}x + \frac{8f(2)-2f(8)}{6}$ για κάθε $x \in (2,8)$.

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x+3} + \frac{x^2}{x-5} = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (-2,0).

11. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = \alpha$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : R^* \to R$ με $f(x)=2x - \ln x^2$.

α) Να δείξετε ότι $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x>0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης f(x)=α για όλες τις διαφορετικές τιμές του $\alpha \le 1$.

13. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $5^x - 3^{-x} + x = 0$ **β)** $4^x + 12^x = 2\cdot 3^x$ **γ)** $2\ln(x-1) + x^2 + x - 6 = 0$

δ) $e^{x^3+18} - e^{2x^2+9x} = -x^3 + 2x^2 + 9x - 18$

14. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 3x^2(2\ln x - 1)$ και $g(x) = 2x^3 - 6x + 1$

15. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ με λ>0, το μέγιστο της $f(x) = \frac{x+1}{e^{\lambda x}}$ γίνεται ελάχιστο.

16. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] η οποία δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα στα α, β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

17. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο R. Να δείξετε ότι $2f(x)<f(x-2)+f(x+2)$ για κάθε $x \in R$.

18. Έστω $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο R με f' συνεχή στο R και ισχύει $f(x)+f(2-x) =0$ για κάθε $x \in R$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο R

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο R

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη με f(1)=0 και $x^2f'(x)+xf(x)=1$ για κάθε x>0.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να δείξετε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(|x|+4\right)^{2|x|+3}>\left(2|x|+3\right)^{|x|+4}$

20. Έστω $f(x)=x^3+2x-5-\eta\mu 2x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο R.

21. Έστω $f:[1,5]\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,5] με f΄΄(x)>0 για κάθε $x\in[1,5]$ και f(2) = f(4) = 0. Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,5)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β) Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0

γ) Η εξίσωση $(x-3)f(x)+x^2-6x+5=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1,5).

22. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με f(0)=0 και 2x<f΄(x)<2x+1 για κάθε x>0

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $g(x)=f(x)-x^2-x$, $h(x)=x^2-f(x)$, f(x) στο $[0,+\infty)$

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x^4}$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-\xi^3=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi\xi}{2}$.

23. Έστω $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο R με f(2) < f΄(x) < f(3) για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο (1,2)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε

$$\frac{f(3)}{f'(x_2)}-\frac{f(1)}{f'(x_1)}=2.$$

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

24. Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{xf(x)}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$ και f(0)=1.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^2+1}$, $x\in R$ είναι σταθερή

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f΄

25. Αν $2\ln x\geq\alpha\cdot\dfrac{x-1}{x}$ για κάθε x > 0. Να δείξετε ότι α=2.

26. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $e^{x-1}f(x)+x\leq x^2-2$ για κάθε x∈R και f(1)=–2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(1, –2).

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$, $x>-1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο (-1,0].

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x.

δ) Να δείξετε ότι $1+\ln(x+1)\leq e^x$ για κάθε x>-1.

ε) Αν ισχύει $\alpha^x\geq 1+\ln(x+1)$, για κάθε x>-1, να δείξετε ότι α = e.

28. Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη στο R με f(2)=4 και $f^2(x)\geq 8x$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(2,f(2)).

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-xf(x)}{x-2}$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^{|x+1|}=f(x^2+2x)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [-4,2].

29. Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη στο R με f(0)=ln9 και $f'(x)=4(x-2)e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ∈ R για τους οποίους ισχύει η σχέση $f(ye^x-x^2-xy)+f(3y-4)=0$.

30. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^{x-1}+i$, $w=1+xi$ με $x\in R$ και α>0 τέτοιοι ώστε $|z+\overline{w}|\geq|\overline{z}-w|$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του Im(zw)

31. Έστω $f : R \to R$, 2 φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in R$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(5)x^4 + x^3 + 2}{3x^4 + 1} = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

32. Έστω $f : R \to R$, παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $f(x) + x \leq 2 + \dfrac{f(1) + f(3)}{2}$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(1)=2+f(3)$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = -1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

33. Έστω $f : [e,e^2] \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f(3)<f(e)<f(e^2)<f(7)$. Να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (e,e^2)

β) η εξίσωση $f''(x) + 2xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (e,e^2)

34. Έστω $f(x)=x^4 - 2x^2 + \lambda$, $\lambda \in R$.

α) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_1, x_2, x_3 \in R$ με $x_1< x_2< x_3$. Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ όπου $Α(x_1, f(x_1))$, $Β(x_2,f(x_2))$, $Γ(x_3,f(x_3))$.

β) Αν $0<\lambda<1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.