ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8 : Κυρτότητα – Σημεία καμπής – Ασύμπτωτες – Κανόνες De L' Hospital – Μελέτη συνάρτησης

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-4)^3$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=–28 είναι αδύνατη στο R

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x+1}$, x>0. Να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κοίλη στο (0,+∞)

β) f(x) ≤ 2x-3 για κάθε x>0 .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x + \lambda}{x}$, λ∈R. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της M(1,f(1)) διέρχεται από το σημείο A(0,e-2).

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

4. Δίνεται η συνάρτηση g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $g(x)\cdot g'(x) = c$, c≠0, για κάθε x ∈ R. Να αποδείξετε ότι η g δεν έχει σημεία καμπής.

5. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) > 0$ για κάθε x ∈ R. Να δείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$ είναι κυρτή

β) f(x) > 0 για κάθε x ∈ R

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $|f'(x) - f'(y)| \le |x - y|$ για κάθε x, y ∈ R και M>1. Να δείξετε ότι :

α) $|f''(x)| \le 1$ για κάθε x ∈ R

β) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{Mx^2}{2}$ είναι κοίλη στο R

γ) f(2)–2f(1)+f(0) < M

7. Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη και κοίλη στο [0,5] με f(2)=0. Να αποδείξετε ότι 3f(0)+2f(5)<0.

8. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R, f κυρτή και f(2)=2, f(4)=8. Να δείξετε ότι :

α) f(3) < 5

β) f΄(4) > 3

9. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [0,+∞) με f(0)=0. Αν η f είναι κυρτή, να δείξετε ότι f(2x)>2f(x) για κάθε x>0.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x + \dfrac{1}{x})^{\alpha}$, 0<x<1 και α>1. Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα (0,1).

β) Για όλα τα x, y $\in$ (0,1) και α>1 ισχύει $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

γ) Αν x>0, y>0, α>1 και x+y=1, τότε ισχύει : $(x+\frac{1}{x})^{\alpha}+(y+\frac{1}{y})^{\alpha} \geq \frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$.

(Εξετάσεις ΑΣΕΠ 2009 – Μαθηματικών)

11. Να βρείτε τους αριθμούς α και β έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+\alpha\eta\mu 2x-\beta\sigma\upsilon\nu 2x-x}{x^{2}}=\frac{9}{2}$.

12. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1^{+}}(x-1)^{x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{e^{x}}$

13. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύει $xf(x)-x^{2}=\alpha\eta\mu 2x$, για κάθε x $\in$ R. Να βρείτε την τιμή του αριθμού α για την οποία η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο Α(0,f(0)), διέρχεται από το σημείο Β(1,3).

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x$, x>0

α) Να δείξετε ότι f(x)≥1 για κάθε x>0

β) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση g : (0,+∞) → R τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)=1+(x-1)^{2}\cdot g(x)$ για κάθε x>0.

15. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\sqrt{x^{2}+1}+3x-1$

β) $f(x)=\frac{2x-|x+2|}{x-1}$

γ) $f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

δ) $f(x)=\sqrt{\frac{x^{3}}{x+1}}$

16. Δίνεται η συνάρτηση f : R →R, παραγωγίσιμη στο R με f(0) = 1 και $f(x)\cdot f'(x)=x$ για κάθε x $\in$ R.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f

ε) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f

δ) Να δείξετε ότι $x^2\geq e^{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ για κάθε x<0.

19.Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}$, για κάθε $x\in R$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+3)-f(x)\right]$

20.Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x-\ln x$, x>0.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

γ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\dfrac{x_0+1}{2x_0^2}$ όπου x_0 το σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha+1)x^2-\beta x+\gamma}{x+\gamma}$, α,β,γ $\in$ R. Να βρείτε τους αριθμούς α,β,γ, ώστε οι ευθείες x=–2 και y=3x–4 να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f στο +∞.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις g, h ορισμένες στο (0,+∞) και για τις οποίες ισχύει $\left|g(x)h(x)+x^2\right|\leq x\ln x$ για κάθε x>1. Αν οι γραφικές παραστάσεις των g, h δέχονται πλάγιες ασύμπτωτες στο +∞ τις ευθείες ε_1, ε_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

23.Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη στο R με f(R)=R και $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}$, για κάθε $x\in R$ και επιπλέον f(0)=1.

α) Να δείξετε ότι $f^3(x)+2f(x)=x+3$, για κάθε $x\in R$

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 και να βρείτε την f^{-1}

γ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης C_f της f

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_g της g με

$$g(x)=\frac{f^{-1}(x)}{xf(x)\left[f^2(x)+2\right]}$$

24. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f και g με $e^x\cdot f'(x)=g'(x)-g(x)$ με f(0)=g(0).

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{g(x)}{e^x}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y = x-2, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{xg(x)-x^2e^x}$.

25. Έστω f : (0,+∞)→R, παραγωγίσιμη με $f(\frac{4}{\pi})=\frac{4}{\pi}$ και $xf'(x)-f(x)=-2\text{συν}\frac{2}{x}$, για κάθε x>0.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f

γ) Εάν g : R→R με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-xf(x)\right]=1$, να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της g στο +∞.

26. Έστω f : (0,+∞)→R, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $xf''(x)+2f'(x)=2$, για κάθε x>0. Αν f(4)=3 και η ευθεία (η) : y=λx–3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο +∞, λ ∈ R, να βρείτε :

α) τον τύπο της f

β) τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της f που είναι κάθετες στην ευθεία (η)

27. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f με $f(x)=\frac{1}{\ln x-x+1}$.

28. Έστω f : R→R, παραγωγίσιμη με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, για κάθε x, y ∈ R. Αν $f'(0)=3$, να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

29. Έστω f : [1,+∞)→R, παραγωγίσιμη με $f(x)\cdot f'(x)=1$, για κάθε x≥1. Να δείξετε ότι :

α) η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής

β) αν f(1)=1, τότε η f είναι κοίλη στο [1,+∞)

30. Έστω f : R→R, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή στο R, τέτοια ώστε $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=-e^x-x+1$, για κάθε x∈R.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f''(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

31. Έστω f : R→R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)=0$, f(3)=30 και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)+f(x+4h)-2f(x+2h)}{h^2}=40x-16$, για κάθε x∈R. Να βρείτε τον τύπο της f.

32. Έστω f : $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$→R, δύο φορές παραγωγίσιμη με f(0)=0 και $f'(0)=2$, τέτοια ώστε $f''(x)+f(x)>0$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι f(x) > ημx για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

33. Έστω f:R→R, παραγωγίσιμη με f' συνεχή στο R, $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=3$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+f(x)}{e^x-x-1}$.

34. Έστω f : [1,2]→R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2] με f κυρτή στο [1,2]. Αν επιπλέον ισχύουν $f(1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{x+2}+3)-x\right]$ και $f(2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln(x+1)-x\ln x\right]$:

α) να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2)

β) να δείξετε ότι $f(x)\le 3-x$ για κάθε $x\in[1,2]$

35. Έστω f : R→R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $e^{f'(x)}\cdot f''(x)=2x$ για κάθε x∈R και $f'(0)=1$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)\cdot f''(x)\right]$

36. Έστω η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

α) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο +∞

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M(0,f(0))

γ) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$.

37. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=x\cdot e^x$

β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

γ) $f(x)=e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

δ) $f(x)=\eta\mu 3x+\sigma\upsilon\nu 3x$

ε) $f(x)=\eta\mu x+\varepsilon\varphi x$