ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη : Γ΄ Λυκείου

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9 : Παράγουσα συνάρτησης

39ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν ισχύει $f''(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2}$, $x > -\frac{1}{2}$ και η ευθεία δ : x+2y-3 = 0 είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της A(0,1).

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f : (0,+∞) →R όταν η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της M(x,f(x)) με κλίση $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ και διέρχεται από το σημείο A(1,e+1).

3. Έστω συνάρτηση f : R → R συνεχής και F μία παράγουσα της f στο R με F(0)=0 τέτοια ώστε $f(x) + 2xF(x) + x^2 f(x) = 4x^3$ για κάθε x ∈ R. Να βρείτε τον τύπο της F.

4. Έστω συνάρτηση f : R → R με f(1)=1 και F μία παράγουσα της f στο R τέτοια ώστε F(x)·f(2-x)=1 για κάθε x ∈ R.
α) Να βρείτε το F(1)
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = F(x)·F(2-x) είναι σταθερή
γ) Να βρείτε τον τύπο της f

5. Έστω συνάρτηση f : (0,+∞) → R παραγωγίσιμη με f(1)=2 και $f(x) - xf'(x) = -x$ για κάθε x>0. Να βρείτε τον τύπο της f

6. Έστω συνάρτηση f : R → R παραγωγίσιμη με $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot(e^x - x - 1)}{x^4} = m \in R$ και $f'(x) = x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε x ∈ R. Να βρείτε :
α) την τιμή f(0)
β) τον τύπο της f
γ) το όριο m

7. Έστω f : R→R με $f(x) = e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι $x^2 = 2(f(x) - f'(x))$.
β) Να υπολογίσετε την παράγουσα της $g(x) = \frac{x^2}{f(x)}$ όταν x>0.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + x^3 - x + 2$, $x \in R$.
α) Να βρείτε τον αριθμό α για τον οποίο ισχύει $f(x) \geq f(\frac{1}{2})$ για κάθε $x \in R$.
β) Για την παραπάνω τιμή του α, να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση g που ικανοποιεί τις συνθήκες $g'(x)\cdot e^x = f''(x)$ για κάθε x ∈ R και g(0) = 18.

9. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R^* για την οποία ισχύουν :
$xf'(x) - f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x \in R^*$, f(1) = e και f(-1) = -e. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

10. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (0,π) με $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{35}$ και
$f'(x)ημx - f(x)συνx = ημ^6x \cdot συν^3x$ για κάθε x ∈ (0,π). Να βρείτε :
α) τον τύπο της f
β) το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^5 \cdot \ln(x+2)}$.

11. Έστω f : R→R δύο φορές παραγωγίσιμη με f(0)=1, f΄(0)=0 και f΄΄(x)=f(x)+x, για κάθε x ∈ R. Να βρείτε τον τύπο της f

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{ημ^2x \cdot συν^2x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
α) Να εξετάσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
β) Να υπολογίσετε την παράγουσα της g(x)=xf(x).

13. Έστω f : (0,+∞)→R, δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f''(x) = 9x^2 \cdot \ln x$, για κάθε x>0. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της Α(1,1) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x :
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να δείξετε ότι f(x) > 1 για κάθε x>1

14. Έστω f : (1,+∞)→R, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $2xf'(x)+(x^2-1)f''(x)=1$, f(2)=–2ln3 και f΄(3)=1.
α) Να βρείτε τον τύπο της f
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο R
γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}$

15. Έστω f:(0,π)→R δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε f΄΄(x)ημx+f(x)ημx=ημ2x, για κάθε x∈(0,π), $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ και $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

16. Έστω f : (0,+∞)→R δύο φορές παραγωγίσιμη με f(1)=e+1 και f΄(1)=2. Να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύει η σχέση $f''(x) = \frac{f'(x) + x^3 \cdot e^x}{x}$ για κάθε x>0.

17. Έστω συνάρτηση f:(0,+∞)→(0,+∞), δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f(1)=1 η οποία ικανοποιεί τη σχέση $xf(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f'(x)}$ για κάθε x>0.

α) Να δείξετε ότι $\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}$, x>0.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.