Θ Ε Μ Α Τ Α

Π Ρ Ο Α Γ Ω Γ Ι Κ Ω Ν   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ω Ν

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2000 - 2013

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 0
Θ Ε Τ Ι Κ Η   Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η

<u>ΘΕΜΑ 1ο :</u>

Α.1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. **Μονάδες 4**

Α.2. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8,5**

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0

β. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0

Μονάδες 4,5

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης **Α** και δίπλα τον αριθμό της στήλης **Β** που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α **συναρτήσεις**	**Στήλη Β** **εφαπτόμενες**
α. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$	**1.** $y = -2x+\pi$
β. $f(x) = ημ2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	**2.** $y = \frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x) = 3\lvert x\rvert$, $x_0 = 0$	**3.** $y = 9x-6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$	**4.** $y = -9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

<u>ΘΕΜΑ 2ο :</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2z+i}{\bar{z}-2i}$, $z \in C$ με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών :

$w_1 = f(9-5i)$ **Μονάδες 6**

$w_2 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004}$ **Μονάδες 6**

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \lvert w_1\rvert & 0 \\ 0 & -\lvert w_1\rvert \end{bmatrix}$ όπου $\lvert w_1\rvert$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος **α.**

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι :

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y=x

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Μονάδες 5

γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος **β.**, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει : ΜΧ = Κ όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\frac{\pi}{2}$. **Μονάδες 8**

<u>ΘΕΜΑ 3ο :</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι :

α. η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. **Μονάδες 7**

β. υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\frac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000. **Μονάδες 6**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ’ έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. **Μονάδες 15**

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. **Μονάδες 10**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 0
Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η   Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός ;
Μονάδες 2,5

β) Αν Μ(x,y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ δεδομένο διάνυσμα και $M'(x',y')$ η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x΄, y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$.
Μονάδες 5

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
T_1 : “συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x”	**1.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2 : “στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$”	**2.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

Β.2. Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα $A=A_1A_2-A_2A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως του ερωτήματος **Β.1**.

α) Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός. **Μονάδες 4,5**

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας ε : 2x-y+5 = 0 μέσω του μετασχηματισμού Τ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο :

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{5+i}{2+3i}$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή α+βi, α,β ∈R. **Μονάδες 4**

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή. **Μονάδες 5**

γ) Αν θ=Argz, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα :

Α. $\frac{\pi}{4}-\theta$ **Β.** $\frac{\pi}{2}+\theta$ **Γ.** $\theta-\frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\pi+\theta$ **Μονάδες 3**

δ) Το z^4 είναι ισο με :

Α. 4 **Β.** 4i **Γ.** –4i **Δ.** -4 **Μονάδες 3**

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει : $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. **Μονάδες 6**

Β. Να βρεθούν τα α,β ∈R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος **Β**, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο :

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου t≥0. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι

$\dfrac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t) **Μονάδες 6**

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωση του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη ; **Μονάδες 6**

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t=8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν από τη χρονική στιγμή t=10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ln11≈2,4) **Μονάδες 13**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 1

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει :

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει η ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2\rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2\rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert\overline{z_1}\rvert$	**δ.** –5
5. $\lvert iz_2\rvert$	**ε.** -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.   Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο :

Εστω f μία πραγματική συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$.

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4,f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

<u>ΘΕΜΑ 3ο :</u>

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι : $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in R$, όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Εστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt$, για κάθε $x \in R$.

Εστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$ Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$ Μονάδες 7

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 2

ΘΕΜΑ 1ο :

A. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε να δείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 12**

B.1. Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \text{συν}x$ **Μονάδες 8**

B.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in N^*$.

α. Να δείξετε ότι f(3)+f(8)+f(13)+f(18) = 0. **Μονάδες 7**

β. Αν $|z| = \rho$ και Arg(z)=θ, να δείξετε ότι $f(13) = \rho\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$.

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και Arg(z)= $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο :

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. **Μονάδες 7**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. **Μονάδες 18**

ΘΕΜΑ 4ο :

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g στο [α,β]. Να αποδείξετε ότι αν h(x)>g(x) για κάθε

$x \in [\alpha,\beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. **Μονάδες 2**

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in R$ και $f(0)=0$.

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f. **Μονάδες 5**

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 12**

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=0, x=1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

Μονάδες 6

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 3

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 8

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ; Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η η f είναι κυρτή στο Δ. Μονάδες 2

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in R$. Μονάδες 2

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. Μονάδες 2

ε. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α,β ∈ R. και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι Re(w)=3α-β+4 και Im(w)=3β-α. Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2. Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z ,οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2, έχει το ελάχιστο μέτρο. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$ για κάθε x∈R. Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3. Μονάδες 8

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>
Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha,\beta)$, $\delta \in (\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι :

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β)

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

Μονάδες 8

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2 & \text{αν } -2 \le x \le -1 \\ -x & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 2x^3 - 6x^2 + 5x - 2 & \text{αν } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θέματος 4γ, αλλά όχι και το συμπέρασμά της.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΙΟΥΛΙΟΥ 2003)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \ .$$ **Μονάδες 2**

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f **Μονάδες 2**

γ. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1 – 1 , αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ **Μονάδες 2**

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει: $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$. **Μονάδες 2**

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z|=2$ και $\mathrm{Im}(z) \ge 0$. **Μονάδες 12**

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **Μονάδες 5**

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$ **Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη . **Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα **Μονάδες 8**

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o . **Μονάδες 9**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2004

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$. **Μονάδες 10**

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους **Μονάδες 2**

β. $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ **Μονάδες 2**

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)$ **Μονάδες 2**

δ. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 2**

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx$, $\alpha\in R$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$ **Μονάδες 9**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει

$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$, όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με $\alpha, \beta \in R^*$, τότε :

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g'. **Μονάδες 5**

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ **Μονάδες 8**

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$ **Μονάδες 6**

δ. Αν επιπλέον f(2) = α > 0 , f(3) = β και α > β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. **Μονάδες 6**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΙΟΥΛΙΟΥ 2004)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **Μονάδες 9**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Μονάδες 2**

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. **Μονάδες 2**

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. **Μονάδες 2**

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **Μονάδες 2**

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$ εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, με $k\in N$ και $k\geq 2$. **Μονάδες 2**

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$, όπου m ∈R, m > 0.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε x ∈ R. **Μονάδες 13**

β. Αν m=10, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται μία συνάρτηση f : [α,β] → R συνεχής στο διάστημα [α,β] με f(x)≠0 για κάθε x ∈ [α,β] και μιγαδικός αριθμός z με Re(z) ≠ 0, Im(z) ≠ 0 και $|\mathrm{Re}(z)|>|\mathrm{Im}(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

α. $|z|=1$ **Μονάδες 11**

β. $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$ **Μονάδες 5**

γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (-1,1). **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)\to$ R τέτοια, ώστε

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)dt.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$. **Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$ **Μονάδες 5**

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **Μονάδες 6**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 5

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1 Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και f(α) ≠ f(β) δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$. **Μονάδες 9**

Α.2. Πότε η ευθεία y = λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **Μονάδες 4**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α) < 0 και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε f(ξ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β) > 0. **Μονάδες 2**

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ΄ ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **Μονάδες 2**

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}. **Μονάδες 2**

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$. **Μονάδες 2**

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)-f(\alpha)$ για κάθε x∈Δ. **Μονάδες 2**

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Δείξετε ότι : $\bar{z}_1=\dfrac{9}{z_1}$. **Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι : $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, λ>0.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 3**

β. Δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y=λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. **Μονάδες 7**

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και τον άξονα y΄y, είναι $E(\lambda)=\dfrac{e-2}{2\lambda}$. **Μονάδες 8**

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. **Μονάδες 7**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε x ∈R και f(0) = 0.

α. Να δειχτεί ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$. **Μονάδες 6**

β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$. **Μονάδες 6**

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις : $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι h(x)=g(x) για κάθε x∈R. **Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0,1). **Μονάδες 6**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΙΟΥΛΙΟΥ 2005)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **Μονάδες 9**

Α.2 Πότε μία συνάρτηση $f:A\to R$ λέγεται «1-1» ; **Μονάδες 4**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. **Μονάδες 2**

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως σε ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_0,f(x_0)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 2**

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. **Μονάδες 2**

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f\circ g\neq g\circ f$ **Μονάδες 2**

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **Μονάδες 2**

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda\in R^*$, τότε ισχύει : $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

α. Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1-\bar{z}_2=5+5i$, να βρείτε τους z_1,z_2. **Μονάδες 10**

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z-1-3i|\le\sqrt{2}$ και $|w-3-i|\le\sqrt{2}$:

i. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και **Μονάδες 10**

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με f ΄(x)≠0 για κάθε $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1». **Μονάδες 7**

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$. **Μονάδες 9**

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε) : $y = -\frac{1}{668}x + 2005$. **Μονάδες 9**

<u>ΘΕΜΑ 4º :</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

α. Να δείξετε ότι :

i) f(0) = 0 **Μονάδες 4**

ii) $f'(0) = 1$ **Μονάδες 4**

β. Να βρείτε το $\lambda \in R$ έτσι, ώστε : $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$. **Μονάδες 7**

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι :

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. **Μονάδες 6**

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$. **Μονάδες 4**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ 2 0 0 6

ΘΕΜΑ 1ο :

Α1. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι :

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 10**

Α2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ; **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0.

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in R$.

ε. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f′, g′ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \ge 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. **Μονάδες 8**

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x. **Μονάδες 4**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. **Μονάδες 9**

ii. $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) \ge -1$. **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. **Μονάδες 8**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x) = lnx στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^{x}$ στο σημείο $B(\beta, e^{\beta})$ με $\beta \in R$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **Μονάδες 9**

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. **Μονάδες 6**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ 2 0 0 6
(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1 Να αποδείξετε ότι : $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$, $x \in R$. **Μονάδες 10**

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει : $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2|$. **Μονάδες 2**

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$ **Μονάδες 2**

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left[\ln|x|\right]' = \frac{1}{x}$ **Μονάδες 2**

δ. Μία συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x. **Μονάδες 2**

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β] τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in R$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο R. **Μονάδες 9**

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)}dx$. **Μονάδες 9**

γ. Για κάθε x < 0 να αποδείξετε ότι : $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2. **Μονάδες 7**

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_0 = -3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). **Μονάδες 9**

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), τον άξονα x΄x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$. **Μονάδες 9**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = xln(x+1) - (x+1)lnx με x > 0.

α. i. Να αποδείξετε ότι : $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, x > 0.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$. **Μονάδες 5**

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α $\in (0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$. **Μονάδες 8**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 7

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις *f*, g λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**

Α.3 Πότε η ευθεία $y = 1$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f *στο* $+\infty$; **Μονάδες 3**

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν *f* συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

β. Έστω *f* μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ. Αν η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 .

δ. Αν *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ =1. **Μονάδες 9**

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$ για α=0 και α=2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1, και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2ημ^2θ$ όπου $θ \in R$ μια σταθερά με $θ \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η *f* παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. **Μονάδες 7**

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$. **Μονάδες 3**

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* και την ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω *f* μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 8**

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει : $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. **Μονάδες 4**

δ. Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} ημt^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$ **Μονάδες 7**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 7
(Επαναληπτικές εξετάσεις)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f, είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 10**

Α.2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. **Μονάδες 2**

β. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β] τότε $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$ **Μονάδες 2**

γ. Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. **Μονάδες 2**

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου Α= $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και Β= $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$. **Μονάδες 2**

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x)=g(x) για κάθε $x \in \Delta$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$.

α. Να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ **Μονάδες 8**

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχτεί ότι α=β=3. **Μονάδες 9**

γ. Αν α=β=3, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x)dx$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$, $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1,+∞). **Μονάδες 10**

β. Να αποδειχτεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 7**

γ. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 8**

<u>ΘΕΜΑ 4º :</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου α,β $\in$ R με β $\neq$0.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in R$.

α. Να αποδειχτεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. **Μονάδες 9**

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 6**

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ > 0, να υπολογιστεί ο z_1 και να δειχτεί ότι $\left(z_1 + 1 + i\right)^{20} - \left(\bar{z}_1 + 1 - i\right)^{20} = 0$. **Μονάδες 10**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 8

ΘΕΜΑ 1ο :

Α.1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει : $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ **Μονάδες 10**

Α.2. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] ; **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μία συνάρτηση $f : R \to R$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$ **Μονάδες 2**

β. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 2**

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha,\beta,\gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών. **Μονάδες 2**

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. **Μονάδες 2**

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left|(i + 2\sqrt{2})z\right| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$ τότε να βρείτε :

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. **Μονάδες 6**

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w. **Μονάδες 7**

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$. **Μονάδες 6**

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. **Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$$f(x) = \left(10x^3 + 3x\right)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ **Μονάδες 8**

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ **Μονάδες 4**

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g''(0) = 1$, τότε :

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ **Μονάδες 10**

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 **Μονάδες 3**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ 2 0 0 8
(Επαναληπτικές εξετάσεις)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Έστωμία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 10**

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ;
Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

δ. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί, τότε : $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία :
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - l) = 0$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι β = -1 και γ = 1 **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει : $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 - 2\ln x$, x > 0.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει : $f(x) \geq 1$ για κάθε x > 0. **Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. **Μονάδες 6**

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0,e). **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,+\infty)$, $h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}$, $x \in (0,+\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$ **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μονάδες 8**

γ. Αν $h(1) = 2$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$ **Μονάδες 6**

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$ **Μονάδες 5**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 0 9

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Έστω μία συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η *f* είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει f(x) = 0, να αποδείξετε ότι η *f* είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **Μονάδες 10**

Β. Πότε μία συνάρτηση *f* λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$

δ) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε x ∈ [α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x΄x είναι $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)i$, $\lambda \in R$.

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$. **Μονάδες 9**

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. **Μονάδες 8**

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, x > - 1, όπου α>0 και α≠1.

Α. Αν ισχύει f(x)≥1 για κάθε x>-1, να αποδείξετε ότι α=e. **Μονάδες 8**

Β. Για α =e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. **Μονάδες 5**

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,+∞). **Μονάδες 6**

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0)\cup(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$. **Μονάδες 6**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0,2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt,\ x \in [0,2]$,

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2] \\ 6\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]. **Μονάδες 5**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}$ **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$. **Μονάδες 7**

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$ Μον**άδες 7**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΙΟΥΛΙΟΥ 2009)

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **Μονάδες 9**

Β. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f θα είναι συνεχής στο x_0; **Μονάδες 6**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\left(\overline{z^{\nu}}\right)=\left(\overline{z}\right)^{\nu}$ **Μονάδες 2**

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. **Μονάδες 2**

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x)<0 κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ **Μονάδες 2**

δ. Έστω η συνάρτηση f(x)=εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **Μονάδες 2**

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c,\ x\in\Delta$ όπου c είναι μία πραγματική σταθερά **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$.

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z=x+yi οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. **Μονάδες 10**

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. **Μονάδες 8**

γ. Για τους αριθμούς z_1 και z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)$, x > - 1, όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με λ≥-1.

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 5**

Β. Έστω ότι λ = -1

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 10**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με α≠0. **Μονάδες 4**

<u>ΘΕΜΑ 4ο :</u>

Δίνεται μία συνάρτηση f : [0,2] →R η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}$, $0 \le x \le 2$, $f'(0) = 2f(0)$, $f'(2) = 2f(2) + 12e^4$, $f(1) = e^2$ όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 - \dfrac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$, $0 \le x \le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,2]. **Μονάδες 4**

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$ **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι k=6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για κάθε $x \in [0,2]$. **Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3e^{2x}$, $0 \le x \le 2$ **Μονάδες 5**

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$ **Μονάδες 4**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 1 0

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x)+c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)= F(x)+c$, $c\in R$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **Μονάδες 4**

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ; **Μονάδες 5**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x\in R$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$**,** τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$.

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης **Μονάδες 7**

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ **Μονάδες 6**

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w, στο μιγαδικό επίπεδο **Μονάδες 7**

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\le |w| \le 7$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x+\ln(x^2+1)$, $x\in R$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. **Μονάδες 5**

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση : $2(x^2-3x+2) = \ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. **Μονάδες 7**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις : $f(x) \neq x$, $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$, $x \in R$ **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in R$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in R$ **Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in R$ **Μονάδες 7**

Ε Π Α Ν Α Λ Η Π Τ Ι Κ Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ 2 0 1 0

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in R$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(ημx)' = συνx$ **Μονάδες 8**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $\left(α^x\right)' = xα^{x-1}$.

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$**,** τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [α,β]$, τότε $\int_α^β f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 **Μονάδες 5**

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$ **Μονάδες 8**

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2**, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 0$ **Μονάδες 6**

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ **Μονάδες 5**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες **Μονάδες 6**

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$**,** να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $ξ \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε $ξ \cdot f'(ξ) - f(ξ) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο M(ξ, f(ξ)), διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με f(0)=1 και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in R$ **Μονάδες 4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \cdot \int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$ **Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2)$, x∈R, τότε :

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in R$ **Μονάδες 8**

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$, $x \geq 0$ και να λύσετε την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$ **Μονάδες 7**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 1 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. **Μονάδες 10**

Α2. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία y = λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ ; **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β) Μία συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1 όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$**,** τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in R_1 = R$ - {x/συνx=0} ισχύει $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

δ) Ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις :

$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και $w = z - 3i + \dfrac{1}{z - 3i}$.

Β1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \dfrac{1}{z - 3i}$ **Μονάδες 4**

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι : $|z - w| = |z|$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : R→R, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f ′(0) = f(0) = 0, η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$, για κάθε $x \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$**,** $x \in R$ **Μονάδες 8**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = συνx$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : R → R η οποίες για κάθε x ∈ R ικανοποιούν τις σχέσεις : i) f(x)>0 και g(x)>0

$$\text{ii)}\ \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$$

$$\text{iii)}\ \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι f(x)=g(x) για κάθε x∈R **Μονάδες 9**

Δ2. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^x$, x∈R **Μονάδες 4**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})}$, x∈R **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \int_1^x f(t^2)dt$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1 **Μονάδες 7**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ
Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 1 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$ **Μονάδες 10**

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ. **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi , $\alpha,\beta \in R$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\beta$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$|z - i| = 1 + \text{Im}(z)$ (1)

$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i)$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \dfrac{1}{4}x^2$ **Μονάδες 7**

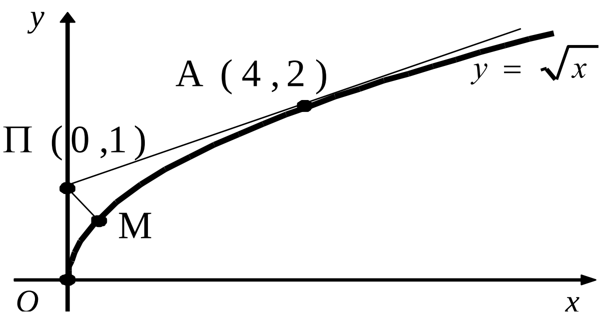
Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$. **Μονάδες 7**

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w. **Μονάδες 5**

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \ge 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t \ge 0$ είναι $x'(t)$= 16 m/min



Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. **Μονάδες 6**

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. **Μονάδες 6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. **Μονάδες 8**

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$. **Μονάδες 3**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R. **Μονάδες 5**

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in R$, τότε :

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$ **Μονάδες 5**

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x′x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$ **Μονάδες 6**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ   Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ   2 0 1 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σεένα διάστημα Δ. Αν σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f\,'(x) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνωσίως αύξουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] ;
Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο ; **Μονάδες 4**

Α4.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in R - \{x/\eta\mu x=0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx$, όπου $f\,'$, $g\,'$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις : $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ (1) $\quad |w - 5\overline{w}| = 12$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1
Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$ **Μονάδες 7**

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ καθ στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **Μονάδες 6**

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z , w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι : $1 \le |z - w| \le 4$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$ **Μονάδες 6**

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0,+\infty)\rightarrow R$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x) \neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε :

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$ **Μονάδες 5**

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, $x > 0$, όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 4). **Μονάδες 6**

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε : $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$ **Μονάδες 4**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2 0 1 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f **Μονάδες 7**

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; **Μονάδες 2**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle **Μονάδες 6**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι $0 < α < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} α^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_α^β f(t)\,dt = G(α) - G(β)$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι :

Β1. $|z| = 1$ **Μονάδες 7**

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 6**

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z **Μονάδες 6**

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \dfrac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει : $xf(x)+1 = e^x$ για κάθε $x \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)). Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση 2f(x)=x+2, x ∈ R έχει ακριβώς μία λύση. **Μονάδες 8**

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ln x)\ln(f(x))\right]$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : A→R, με A=(0,+∞), για την οποία ισχύουν :

- f (A) = (–∞,0]
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο (0,+ ∞), και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt+2$ για κάθε x>0

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, x > 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, x > 0 **Μονάδες 8**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $Σ(x_0, F(x_0))$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $ξ \in (x_0, β)$ με $β > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο Μ(ξ, F(ξ)) να είναι παράλληλη προς την ευθεία
ε : F(β)x – (β–1)y + 2012(β–1) = 0 **Μονάδες 6**

Δ3. Αν β > 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$\dfrac{\left[F(β)+(1-β)f(β)\right]x^5}{x-1}+\dfrac{(β-1)(x+1)^3}{x-3}=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα ως προς x, στο διάστημα (1,3) **Μονάδες 5**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\dfrac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt$, για κάθε x > 0 **Μονάδες 6**

Α Π Ο Λ Υ Τ Η Ρ Ι Ε Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ 2 0 1 3

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, ρ>0 παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$

δ) Ισχύει ότι : $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ=1 (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma \in R$, και $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2) = 2|$ τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5 **Μονάδες 9**

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση: $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι : $|v| < 4$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g : R→ R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in R$

• f (0) = 1 και

• $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ **Μονάδες 9**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(g(x)) = 1

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε :

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f : (0, + ∞) → R μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

• Η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞)

• f (1) = 1

• $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} \dfrac{f(t)-1}{t-1} dt$, x ∈ (1,+∞) και α > 1

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. f ′ (1) = 0 (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^{42}+5}^{2x^4+6} g(u)du$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$(\alpha - 1)\int_{\alpha}^{x} \dfrac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, x > 1 έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2 0 1 3

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 7**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. **Μονάδες 4**

Α3. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση :

$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|$, $x \in R$ έχει μία διπλή ρίζα, την x=1

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ_1=1, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(3,4) και ακτίνα ρ_2=4 **Μονάδες 8**

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι : $|z-w| \le 10$ και $|z+w| \le 10$ **Μονάδες 6**

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει : $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύουν :

• $2xf(x)+x^2\left(f'(x)-3\right)=-f'(x)$ για κάθε x ∈ R

• $f(1)=\dfrac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, x ∈ R και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Μονάδες 6**

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1 **Μονάδες 4**

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση $f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)$ **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt=-\xi(3\xi^2-1)f(\xi^3-\xi)$$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0,+∞)→R δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,+∞), για την οποία ισχύουν :

• $f(x)=x+\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2-1}{f(t)}dt\right)du$ για κάθε x > 0

• $f(x)\cdot f'(x)\neq 0$ για κάθε x > 0 και f(0) = 0

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ με x > 0 και

$h(x)=\left(f'(x)\right)^3$ με x ≥ 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)\cdot f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2$ για κάθε x > 0

Μονάδες 4

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f ΄ στο (0,+∞) (μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι f ΄ (0) = 1 (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο (0, +∞), να αποδείξετε ότι :

α. $g(x)\ge 2-x$ για κάθε x ∈ (0, +∞) (μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx<1$ (μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1 **Μονάδες 8**