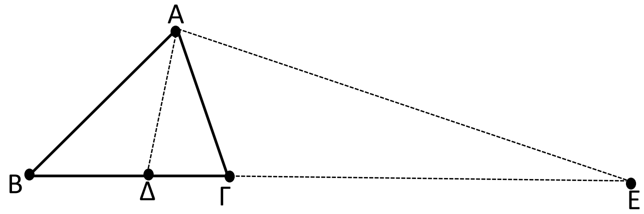
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - $2^{ο}$ ΘΕΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ>ΑΓ) και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ=6, ΔΒ=3, ΒΓ=5 και ΒΕ=15, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = 4 (Μονάδες 12)

β) ΔΕ = 12 (Μονάδες 13)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

2. Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:

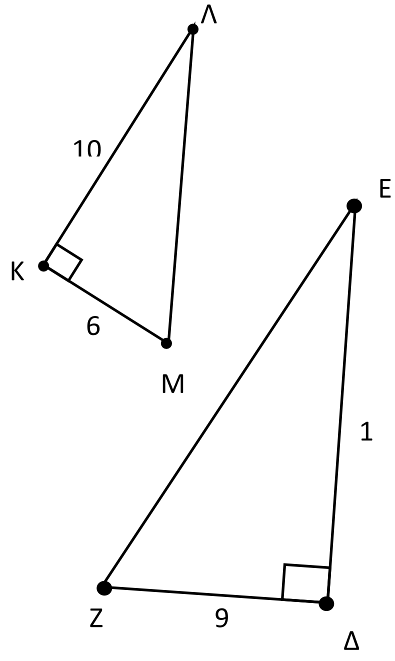
α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 14)

β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,

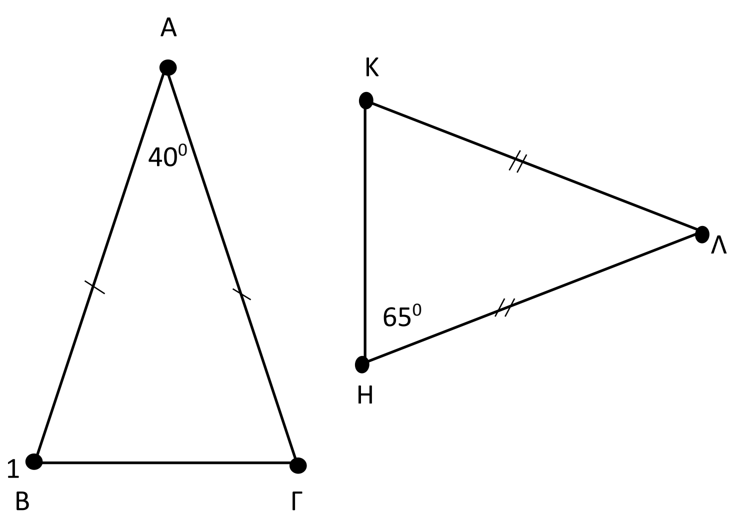
i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών. (Μονάδες 6)

ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 5)

$1^{ο}$ ζεύγος: τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ

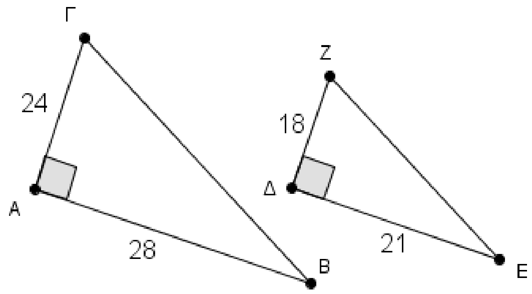


2ο ζεύγος: τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



3. Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες Α και Δ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα ισχύουν ΑΒ=28, ΑΓ=24 και ΔΕ=21, ΔΖ=18.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)



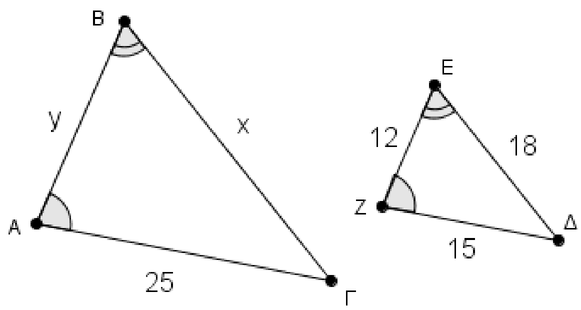
β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά:

$\frac{\mathrm{AB}}{\dots} = \frac{\dots}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\dots}$ (Μονάδες 9)

γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $\mathrm{ZE} = \frac{18}{21}\Gamma\mathrm{B}$ **ii.** $\mathrm{ZE} = \frac{24}{28}\Gamma\mathrm{B}$ **iii.** $\mathrm{ZE} = \frac{3}{4}\Gamma\mathrm{B}$ **iv.** $\mathrm{ZE} = \frac{4}{3}\Gamma\mathrm{B}$ (Μονάδες 6)

4. Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{Z}},\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{E}}$ και ΑΓ=25, ΕΖ=12, ΕΔ=18 και ΖΔ=15.

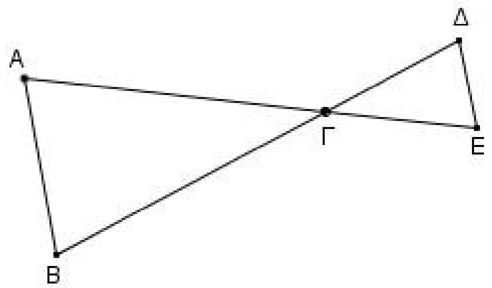


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου *ΔΕΖ* : $\frac{\mathrm{BA}}{\dots} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\dots} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\dots}$ (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα *x* και *y.* (Μονάδες 8)

5. Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.

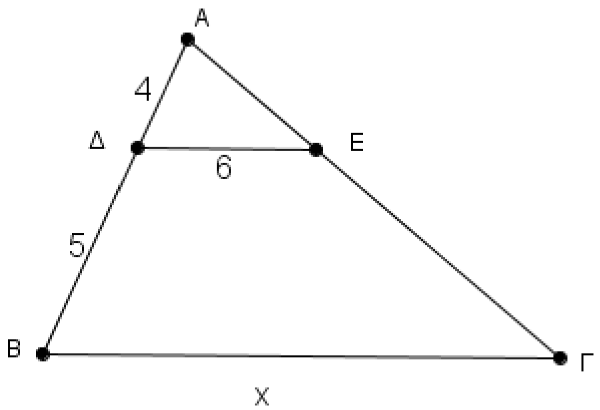


Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΕ (Μονάδες 12)

β) ΒΓ=2ΔΓ και $ΕΓ = \frac{1}{2}ΑΓ$ (Μονάδες 13)

6. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν ΑΔ=4, ΔΒ=5 και ΔΕ=6.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{ΑΒ}{\ldots} = \frac{\ldots}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{\ldots}$$ (Μονάδες 9)

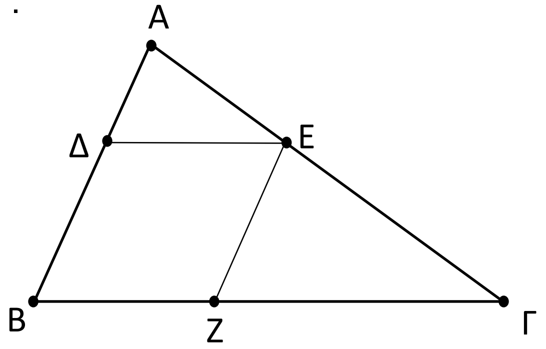
γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x. (Μονάδες 7)

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

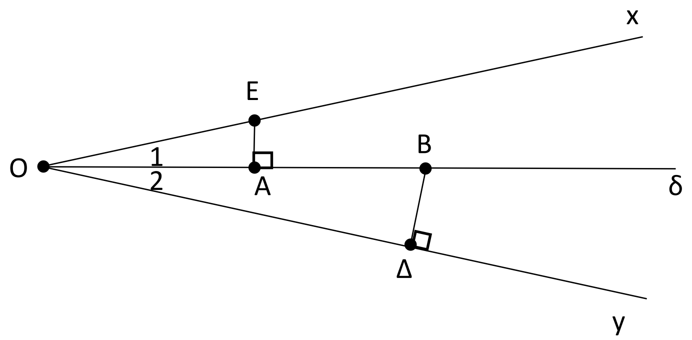
β) 3ΒΖ = ΒΓ. (Μονάδες 15)



8. Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε ΟΒ=2ΟΑ. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

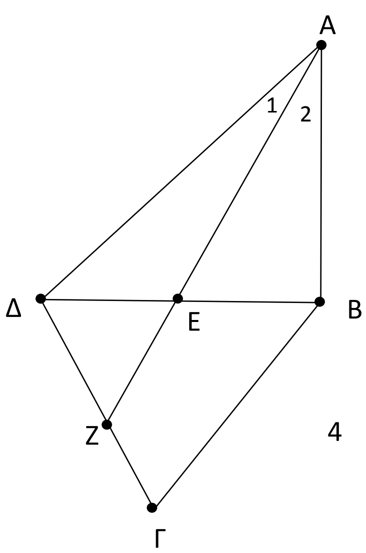
β) $2ΟΑ^2 = ΟΔ \cdot ΟΕ$. (Μονάδες 15)



9. Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Αν ΑΔ=12, ΑΒ = 8, ΔΕ= 9 και ΖΓ = 6, να αποδείξετε ότι:

α) ΕΒ = 6 (Μονάδες 13)

β) ΔΖ =9 (Μονάδες 12)

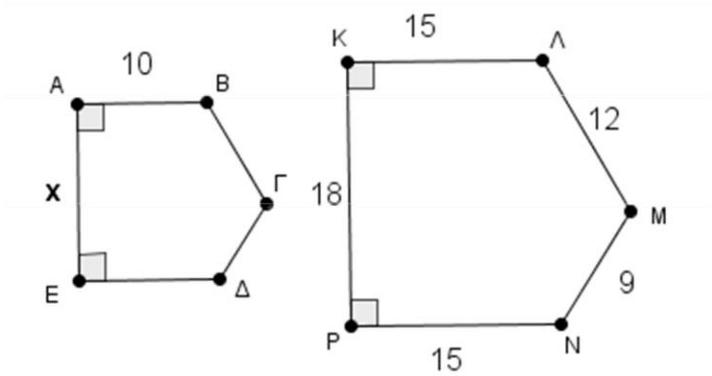


10. Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\hat{\Delta}=\hat{\mathrm{N}}$ και $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Lambda}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. (Μονάδες 9)



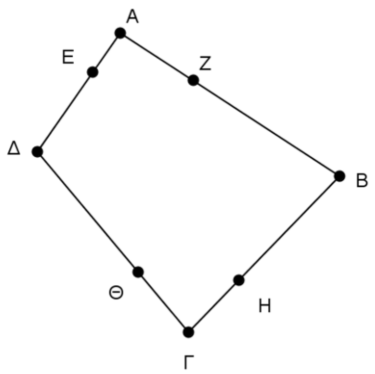
11. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Delta}}=\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}}=\frac{\Gamma\mathrm{H}}{\Gamma\mathrm{B}}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

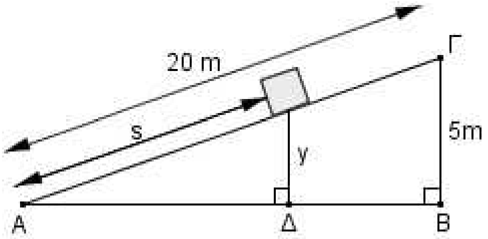
α) ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ. (Μονάδες 10)

β) ΕΖ = ΘΗ = $\frac{1}{3}\Delta\mathrm{B}$ (Μονάδες 10)

γ) ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)



12. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y = \frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα. (Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

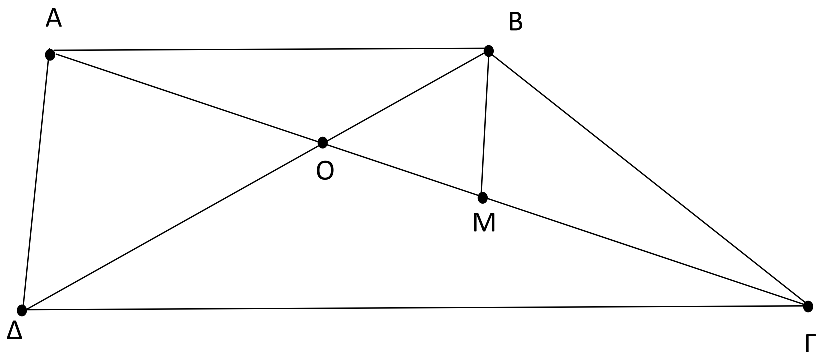
i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα. (Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α. (Μονάδες 7)

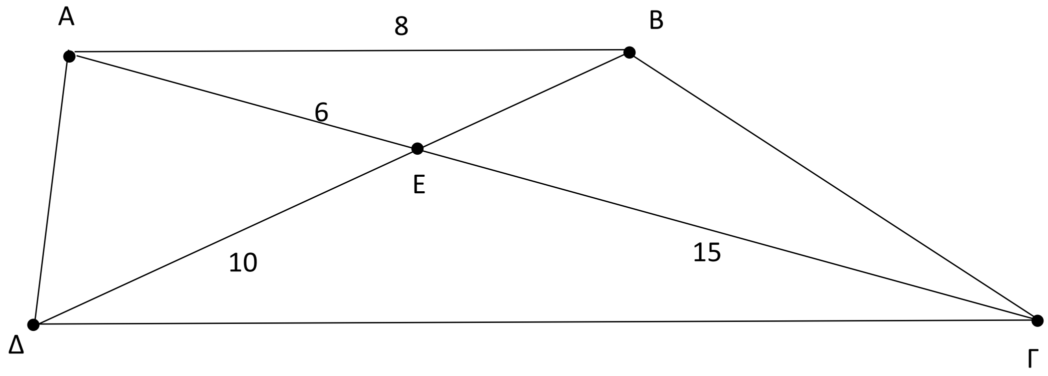
13. Οι διαγώνιοι του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ. Αν ΟΑ=12, ΟΒ=9 και ΟΓ=36, να αποδείξετε ότι:

α) ΟΔ = 27 (Μονάδες 12)

β) ΟΜ = 4 (Μονάδες 13)



14. Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν ΑΒ//ΔΓ, ΑΕ=6, ΑΒ=8, ΓΕ=15 και ΔΕ=10.

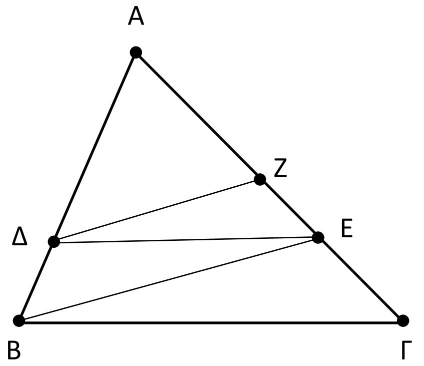


α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ . (Μονάδες 8)

15. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη ΒΕ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\dfrac{AE}{A\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{AB}$ (Μονάδες 10)

β) $\dfrac{AZ}{A\Delta}=\dfrac{AE}{AB}$ (Μονάδες 10)

γ) $\dfrac{AE}{A\Gamma}=\dfrac{AZ}{AE}$ (Μονάδες 5)

16.α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) ΑΓ=4 , ΒΓ=16 , ΒΑ=18, ΔΖ=10, ΕΖ=40, ΔΕ=48

ii) $\hat{A}=63^{o},\ \hat{\Gamma}=83^{o},\ \hat{\Delta}=63^{o},\hat{E}=34^{o}$ (Μονάδες 15)

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΑΓ=7 και ΒΓ=8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3; (Μονάδες 10)

17. Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

α) Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ΑΒ=8, ΑΓ=12, $\hat{A}=35^{o}$, ΔΕ=20, ΔΖ=30, $\hat{\Delta}=35^{o}$

ii. $\hat{A}=47^{o},\ \hat{B}=38^{o},\ \hat{E}=47^{o},\hat{\Delta}=95^{o}$

iii. ΑΒ=ΑΓ , $\hat{A}=\hat{\Delta}$, ΔΕ=ΔΖ (Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 10)

18. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ=9, ΑΓ=15$. Από το βαρύκεντρο $Θ$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$ που τέμνει τις $ΑΒ, ΑΓ$ στα $Δ, Ε$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2$ (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $ΑΔ, ΓΕ$ (Μονάδες 10)

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$ (Μονάδες 10)

β) $\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$ (Μονάδες 10)

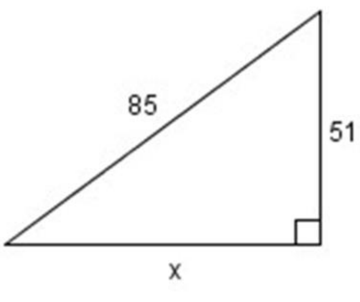
γ) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}+\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=1$ (Μονάδες 5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 : ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

20.α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. 3, 4, 5
ii. 3λ, 4λ, 5λ (λ>0)
iii. 4, 5, 6 (Μονάδες 18)

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4. (Μονάδες 7)



21. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{3}{4}A\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = \frac{5}{4}A\Gamma$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

22.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ύψος ΑΔ και ΑΓ=8 , ΔΓ=$\frac{32}{5}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) ΒΓ (Μονάδες 9)
β) ΑΒ (Μονάδες 8)
γ) ΑΔ (Μονάδες 8)

23. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$)με ΑΓ=4 και ύψος ΑΔ$=\frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

24.Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 και γ=5.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 11)
β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ. (Μονάδες 14)

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6 , ΒΓ = 9 και $\hat{B} = 60^o$.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ$=3\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 9)

26.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 7, β = 4 και $\mu_\beta = \sqrt{33}$.
α) Να αποδείξετε ότι γ=5. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 12)

27.Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.
ii. Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 16)
β) ΑΓ·ΒΔ=ΑΔ·ΒΓ (Μονάδες 9)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 : ΕΜΒΑΔΑ

28. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι ΑΒ=3, ΓΔ=7 και ΒΓ=4 τότε,

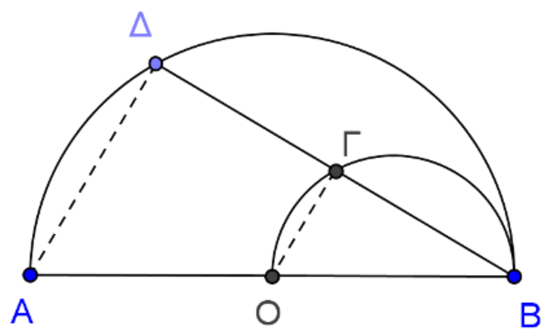
α) να αποδείξετε ότι ΒΕ= $2\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

29. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.Να αποδείξετε ότι:

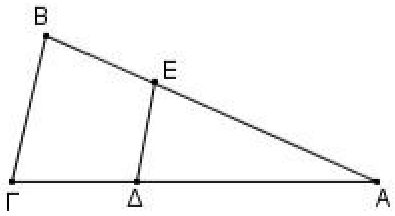
α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια. (Μονάδες 12)

β) (ΑΔΒ)= 4 (ΟΓΒ) (Μονάδες 13)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

30. Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $ΑΕ = \frac{2}{3}ΑΓ$ και $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$



α) Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Γ}Β$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΕΔ}{ΒΓ}$ (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΕ. (Μονάδες 8)

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

31. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.

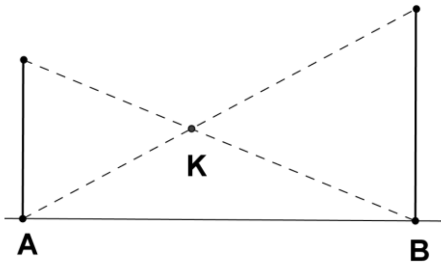
α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

32. Σε δυο σημεία ενός ευθύγραμμου δρόμου ΑΒ βρίσκονται δυο κατακόρυφοι στύλοι ύψους 2 και 3 μέτρων αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε δυο σύρματα για να ενώσουμε την κορυφή του καθενός με τη βάση του άλλου, ώστε τα δυο σύρματα να διασταυρώνονται σε ένα σημείο Κ (σχήμα).



α) Να βρείτε τα ζεύγη των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

β) Προκειμένου να μετρήσουμε πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο Κ στο οποίο διασταυρώνονται τα σύρματα, μετρήσαμε την απόσταση του Κ από τον μικρότερο στύλο και την βρήκαμε 4 μέτρα. Αν η απόσταση ΑΒ των στύλων ήταν 10 μέτρα, πόσο απείχε το σημείο Κ από το έδαφος; (Μονάδες 9)

γ) Δείξτε ότι όποια και αν είναι η απόσταση ΑΒ που απέχουν οι δυο στύλοι μεταξύ τους, η απόσταση του σημείου Κ, όπου διασταυρώνονται τα δυο σύρματα από το έδαφος ,θα είναι η ίδια. (Μονάδες 8)

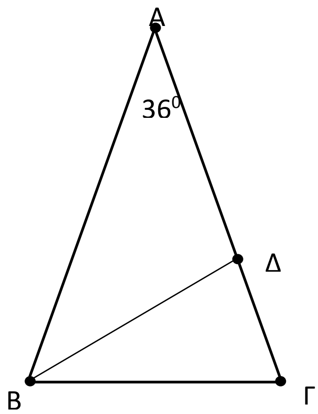
33. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 36^0$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

ii) $Α\Delta^2 = Α\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ (Μονάδες 9)

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ=1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{Α\Delta}{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 10)

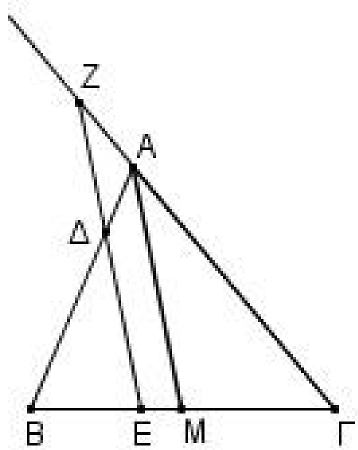


34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσο του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκτασή της ΓΑ στο Ζ.

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i) $\frac{\Delta E}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{AB}$ **ii)** $\frac{EZ}{\dots}=\frac{\dots}{\Gamma M}=\frac{\dots}{\dots}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)



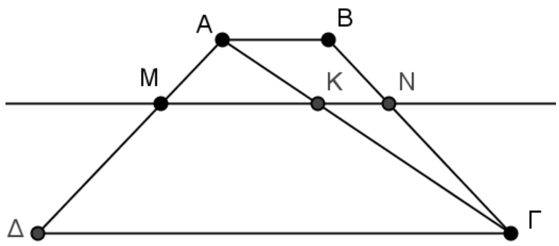
35. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$.Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$ (Μονάδες 6)

β) $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$ (Μονάδες 6)

γ) $MN=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}AB$ (Μονάδες 6)

δ) Ο ισχυρισμός «τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ είναι όμοια» είναι αληθής ή ψευδής; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)

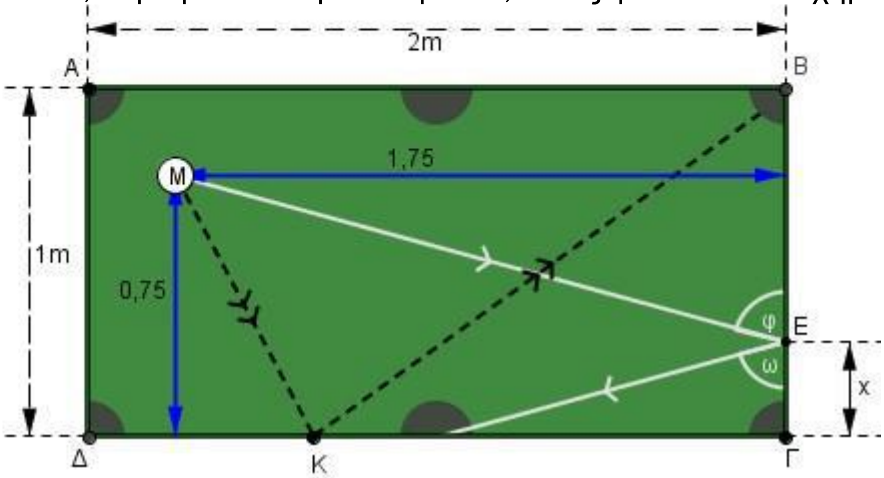


36. Στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $BE=\frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $\Delta Z=\frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ=ΓΝ=2ΜΝ (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{MN} = \frac{1}{5}\mathrm{A\Gamma}$ (Μονάδες 12)

37. Δύο παίκτες Π1 και Π2 παίζουν σε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου με διαστάσεις 1x2 μέτρα. Μία άσπρη μπάλα τοποθετείται έτσι ώστε, να απέχει 1,75 μέτρα από την πλευρά ΒΓ και 0,75 μέτρα από την πλευρά ΔΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο παίκτης Π1 παίζει πρώτος και χτυπάει την μπάλα Μ έτσι ώστε, να προσκρούσει στο απέναντι μέρος του τραπεζιού στο σημείο Ε και κατόπιν να μπει στην τρύπα που βρίσκεται στο μέσον της πλευράς ΓΔ.

Ο παίκτης Π2 τοποθετεί την μπάλα Μ πάλι στο ίδιο σημείο εκκίνησης και προτίθεται να χτυπήσει έτσι τη μπάλα ώστε, να προσκρούσει στην πλευρά ΓΔ σε σημείο της Κ και κατόπιν να μπει στην τρύπα στην κορυφή Β (η διαδρομή ΜΚΒ όπως φαίνεται στο σχήμα). Ο συμπαίκτης του ισχυρίζεται ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και θα χάσει.

(Σημείωση: Η γωνία με την οποία χτυπάει η μπάλα σε μία πλευρά ισούται με τη γωνία με την οποία απομακρύνεται)

α) Να βρείτε πόσο απέχει το σημείο Ε από την κορυφή Γ του μπιλιάρδου.

(Μονάδες 12)

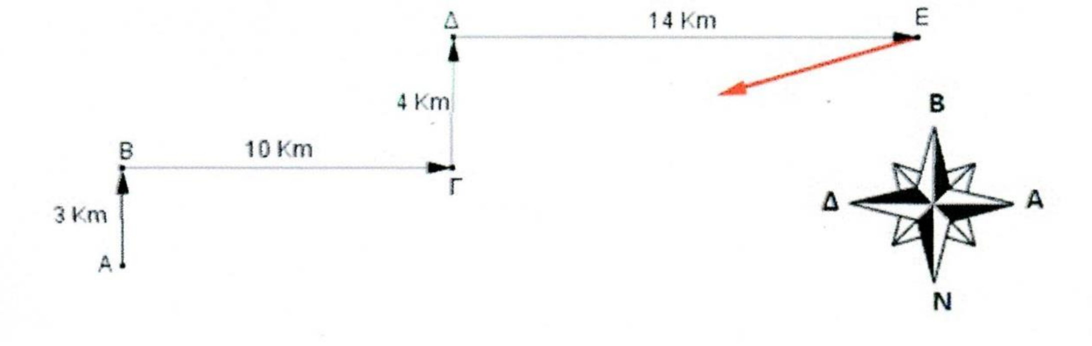
β) Γιατί ο παίκτης Π1 ισχυρίζεται ότι θα χάσει ο συμπαίκτης του; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας. (Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 : ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

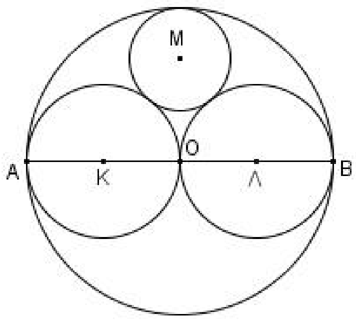
38. Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.

α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



39. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου Ο.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$ (Μονάδες 13)

40. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο $\mathrm{AM} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$. Αν τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο σημείο Η, να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AH} \cdot \mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{AE}$ (Μονάδες 8)

β) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι οξεία. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{AH} \cdot \mathrm{A\Delta} = \alpha^2$ (Μονάδες 8)

41. Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$ (Μονάδες 9)

γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$ (Μονάδες 9)

42. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i. Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$. (Μονάδες 8)

ii. Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ. (Μονάδες 8)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 : ΕΜΒΑΔΑ

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκτασή της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $MP = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (Μονάδες 8)

γ) (ΑΒΓ)=6 (ΜΡΓ) (Μονάδες 9)

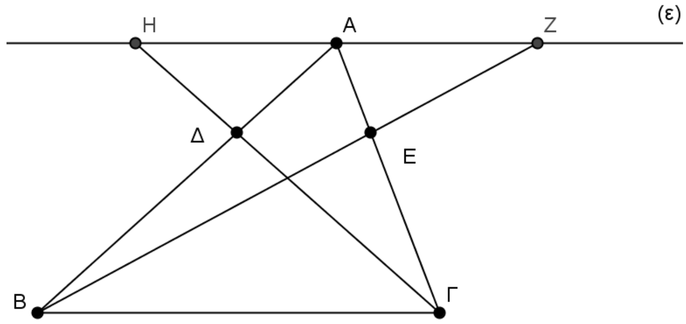
44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ//ΓΒ (Μονάδες 5)

β) ΖΕ = $\dfrac{1}{2}$ ΕΒ. (Μονάδες 7)

γ) ΑΖ = $\dfrac{1}{2}$ ΒΓ. (Μονάδες 7)

δ) (ΒΗΖ) =2 (ΑΒΖ) (Μονάδες 6)



45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ, Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$, $\mathrm{A\Lambda}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{BZ}=\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{AM\Lambda})=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\mathrm{MZ\Lambda})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{5}{18}$. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\mathrm{AMZ\Lambda})}{(\mathrm{AB\Gamma})}$. (Μονάδες 6)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 : ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

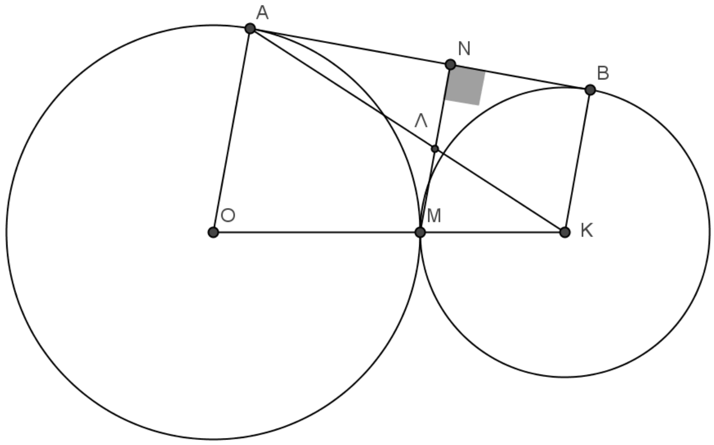
46. Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,α) και (Κ,β) με $a>\beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο M . Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ , με Α , Β σημεία των κύκλων (Ο,α) και (Κ,β) αντίστοιχα . Από το M θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $\mathrm{M\Lambda}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{\Lambda N}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8)

γ) Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (O,a) και (K,β) αντίστοιχα, τότε :

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\left(\frac{(\mathrm{A\Lambda N})}{(\mathrm{KM\Lambda})}\right)^2$$ (Μονάδες 9)


A
N
B
Λ
O
M
K